

Álgebra Lineal

Tema 4. Base y dimensión

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración
de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad **Carlos III** de Madrid



Índice general

4. Base y dimensión	1
4.1. Conjuntos generadores. Conjuntos generados	1
4.2. Bases y dimensión	6
4.2.1. Coordenadas	13
4.3. Cambio de base	15
4.3.1. Cambio de coordenadas usando la base canónica	25

Tema 4

Base y dimensión

4.1. Conjuntos generadores. Conjuntos generados

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vectores del espacio vectorial V . Recordemos que la suma de la forma

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son escalares, se denomina *combinación lineal* de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$. Este concepto es esencial en la teoría de los espacios vectoriales y en él se apoyan numerosas ideas. Comenzamos el tema dando la siguiente definición:

El conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ se denomina **conjunto generado** por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$. Lo denotaremos por $\text{Gen}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Ejemplo

Consideremos los vectores $(1, 1, 1)^t$ y $(1, 1, 0)^t$ de $\mathbb{R}^3$. El conjunto generado por dichos vectores viene dado por el conjunto de todas las combinaciones lineales de la

forma:

$$\begin{aligned}\{\alpha(1,1,1)^t + \beta(1,1,0)^t : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} &= \{(\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha)^t : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha', \alpha', \beta')^t : \alpha', \beta' \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Ahora consideremos los vectores $(-1, -1, 2)^t$, $(1, 1, 1)^t$ y $(1, 1, 0)^t$. El conjunto generado por estos vectores se describe por

$$\begin{aligned}\{\alpha(-1, -1, 2)^t + \beta(1, 1, 1)^t + \gamma(1, 1, 0)^t : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \\ = \{(-\alpha + \beta + \gamma, -\alpha + \beta + \gamma, 2\alpha + \beta)^t : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Sin embargo, si observamos la primera y la segunda coordenadas, vemos que éste también puede ser descrito por:

$$\{(\alpha', \alpha', \beta')^t : \alpha', \beta' \in \mathbb{R}\}.$$

Así: $\text{Gen}((1, 1, 1)^t, (1, 1, 0)^t) = \text{Gen}((-1, -1, 2)^t, (1, 1, 1)^t, (1, 1, 0)^t)$.

El siguiente resultado es esencial en temas posteriores.

Teorema

Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ son elementos de un espacio vectorial V , entonces $\text{Gen}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ es un subespacio de V .

Demostración. Sea $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$ un elemento arbitrario de $\text{Gen}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ y λ cualquier escalar. Puesto que

$$\lambda \mathbf{v} = \lambda(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = (\lambda \cdot \alpha_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\lambda \cdot \alpha_n) \mathbf{v}_n,$$

se deduce que $\lambda \mathbf{v} \in \text{Gen}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Ahora consideremos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \text{Gen}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots +$

$\beta_n \mathbf{v}_n$. Puesto que

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{v}_n \in \text{Gen}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

hemos probado que $\text{Gen}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ es un subespacio de V . $\square$

Además, el teorema anterior motiva la siguiente definición:

El conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es un **conjunto generador de V** si cada vector de V puede escribirse como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Ejemplo

Consideremos los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2)^t$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 3, 1)^t$ y $\mathbf{v}_3 = (-1, 3, 8)^t$. Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Como $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, cualquier combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ puede reducirse a una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 (3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2) = (\alpha_1 + 3\alpha_3)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)\mathbf{v}_2.$$

Así, $S = \text{Gen}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \text{Gen}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Este ejemplo ilustra las siguientes proposiciones:

Proposición

Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ genera un espacio vectorial V y uno de estos vectores puede escribirse como combinación lineal de los otros $n - 1$ vectores, entonces esos $n - 1$ vectores generan V .

Demostración. Supongamos que $\mathbf{v}_n$ puede escribirse como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$:

$$\mathbf{v}_n = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \mathbf{v}_{n-1}.$$

Sea $\mathbf{v} \in V$. Puesto que $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ genera V podemos escribir

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} + \lambda_n \mathbf{v}_n \\ &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} + \lambda_n (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{v}_{n-1}) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_n \alpha_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n \alpha_{n-1}) \mathbf{v}_{n-1}\end{aligned}$$

y cualquier vector $\mathbf{v} \in V$ puede escribirse como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$, i.e., $V = \text{Gen}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$. □

Proposición

Dados n vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, es posible escribir uno de los vectores como combinación lineal de los otros $n - 1$ si y sólo si existen escalares $c_1, \dots, c_n$, no todos cero, tales que

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Demostración. Supongamos que uno de estos vectores, digamos $\mathbf{v}_n$, puede escribirse como combinación lineal de los otros:

$$\mathbf{v}_n = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{v}_{n-1}.$$

Restando $\mathbf{v}_n$ a ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Si hacemos $c_1 = \alpha_1, \dots, c_{n-1} = \alpha_{n-1}, c_n = -1$, se deduce que

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Inversamente, si

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

y al menos uno de los c_i 's, digamos c_n , es no nulo, entonces

$$\mathbf{v}_n = -\frac{c_1}{c_n}\mathbf{v}_1 - \dots - \frac{c_{n-1}}{c_n}\mathbf{v}_{n-1}.$$

□

En virtud de las propiedades anteriores podemos dar las siguientes definiciones (ya conocidas):

Los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ del espacio vectorial V se dicen **linealmente independientes** si

$$c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

implica que todos los escalares $c_1, \dots, c_n$ son iguales a 0. Inversamente, los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ del espacio vectorial V se denominan **linealmente dependientes** si existen ciertos escalares $c_1, \dots, c_n$, no todos nulos, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Obsérvese que la expresión (4.1) representa un sistema lineal homogéneo, que siempre tiene solución trivial. Los vectores serán linealmente independientes si dicha solución es *única*.

El siguiente teorema se da sin demostración.

Teorema

Sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vectores de un espacio vectorial V . Un vector $\mathbf{v}$ de $\text{Gen}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ puede escribirse de manera única como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ si y sólo si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes.

4.2. Bases y dimensión

Los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ forman una **base** del espacio vectorial V si y sólo si

- 1) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes.
- 2) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ generan V .

NOTA: es importante observar que las bases son conjuntos ordenados de vectores. Por lo tanto denotaremos una base como $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Ejemplo

La base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $B_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ con $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^t$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^t$. Verifiquemos que B_0 es efectivamente una base.

Claramente, $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son linealmente independientes, puesto que $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Además todo vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^t$ de $\mathbb{R}^2$ puede representarse como una combinación lineal de estos dos vectores de la forma

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$$

y así $\mathbb{R}^2 = \text{Gen}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Por tanto, $B_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Veamos otras propiedades de los conjuntos generadores y de las bases de un espacio vectorial.

Teorema

Si $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ es un conjunto generador de un espacio vectorial V , cualquier colección de m vectores de V con $m > n$ es linealmente dependiente.

Como consecuencia, si $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ y $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ son bases de un espacio vectorial V ,

entonces $n = m$. A la vista de este resultado, podemos referirnos al número de elementos de cualquier base de un espacio vectorial dado V como la **dimensión** de dicho espacio vectorial. Si existe un conjunto finito de vectores que genera V , diremos que V es de dimensión finita. En caso contrario, diremos que V es de dimensión infinita. En este curso sólo nos ocuparemos de espacios vectoriales de dimensión finita.

Teorema

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita $n > 0$:

- Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes genera V .
- Si n vectores generan V , son linealmente independientes.

Finalmente:

Proposición

Sea $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un conjunto ordenado de vectores de V (sobre $\mathbb{K}$). Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. B es una *base* de V .
2. B es un conjunto *linealmente independiente maximal* (es decir, si añadimos cualquier vector al conjunto, éste deja de ser linealmente independiente).
3. B es un *conjunto generador minimal* de V (es decir, si eliminamos cualquier vector de B , éste deja de ser generador de V).

Veamos el caso de algunos espacios vectoriales muy utilizados. Es fácil demostrar que:

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
- $\dim(\mathbb{K}^{m \times n}) = mn$.
- $\dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$.

Conocidos estos resultados, podremos determinar si un conjunto de vectores forma o no una base en el correspondiente espacio vectorial, observando si su cardinalidad coincide con la dimensión del espacio y, en tal caso, estudiando simplemente si son linealmente independientes.

Ejemplo

El espacio $\mathbb{R}^3$ de dimensión 3 es generado por los vectores linealmente independientes $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^t$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^t$ y $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^t$, los cuales forman la base canónica $B_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

El conjunto ordenado $((1, 1, 1)^t, (1, 1, 0)^t, (1, 0, 0)^t)$ también es una base de $\mathbb{R}^3$. Para probar esto, igualamos a cero una combinación lineal arbitraria de todos ellos

$$\alpha_1(1, 1, 1)^t + \alpha_2(1, 1, 0)^t + \alpha_3(1, 0, 0)^t = (0, 0, 0)^t,$$

que da lugar al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

lo que demuestra que los tres vectores son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Dada la matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, los espacios fila y columna de A tienen la misma dimensión y ésta es igual al rango de la matriz $r = \text{rg}(A)$. Se pueden encontrar bases para estos espacios entre las filas y columnas de la propia A . Los espacios nulos de A y A^t tienen dimensiones $n - r$ y $m - r$ respectivamente.

Espacio Vectorial	Dimensión	Subespacio de
$N(A)$, espacio nulo	$n - \text{rg}(A)$	$\mathbb{K}^n$
$\mathcal{C}(A)$, espacio columna	$\text{rg}(A)$	$\mathbb{K}^n$
$\mathcal{C}(A^t)$, espacio fila	$\text{rg}(A)$	$\mathbb{K}^m$
$N(A^t)$, espacio nulo de A^t	$m - \text{rg}(A)$	$\mathbb{K}^m$

Para encontrar una base del espacio nulo de A , resolvemos el sistema $Ax = 0$; si aplicamos el método de Gauss, tendremos que reducir A a forma escalonada.

Para encontrar una base del espacio columna, la forma escalonada de A nos permitirá identificar las columnas que forman un sistema linealmente independiente (las que corresponden a las variables pivote).

De igual modo, para encontrar una base del espacio fila, reducimos A a su forma escalonada; las filas no nulas corresponden a las que forman (en la matriz A) un conjunto linealmente independiente.

Para el caso del espacio nulo de A^t , podemos encontrar una base resolviendo el sistema $A^t x = 0$. Sin embargo hay una alternativa más práctica: aplicar el método de Gauss a la matriz $(A \mid I)$ para obtener la matriz equivalente $(U \mid J)$. Las $m - \text{rg}(A)$ últimas filas de J forman una base del espacio nulo de la traspuesta de A . Esto se debe a que al realizar operaciones elementales sobre $(A \mid I)$, la matriz J , invertible, refleja las operaciones que se han realizado para obtener U , es decir, $JA = U$. Al realizar este producto, obtenemos

que las últimas $m - \text{rg}(A)$ filas de A son vectores fila 0; es decir, las últimas $m - \text{rg}(A)$ filas de J , multiplicadas por A , producen el vector fila 0 y, por ello, forman una base del espacio nulo de A^t . Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Vamos a determinar sus cuatro espacios vectoriales asociados.

- 1) **Espacio Nulo:** $N(A) = \{v \in \mathbb{R}^4 : A v = 0\}$. La condición $A v = 0$ se transforma en:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que representa un sistema lineal con tres ecuaciones y cuatro incógnitas v_1, v_2, v_3 y v_4 . Si obtenemos una forma escalonada de la matriz, resulta:

$$A \equiv \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \boxed{3} & 5 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que v_1 y v_2 serán variables pivote y v_3 y v_4 los parámetros. Por tanto el espacio nulo será

$$N(A) = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^t \in \mathbb{R}^4 : v_1 = \frac{17}{3}v_3 - \frac{11}{3}v_4, v_2 = -4v_3 + v_4 \right\}$$

y una base vendrá dada por

$$B = ((17, -12, 3, 0)^t, (-11, 3, 0, 3)^t).$$

Obsérvese que de este resultado también se deduce que el rango de A es 2.

2) Espacio columna:

$$\mathcal{C}(A) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3: \mathbf{v} = a_1 \mathbf{A}_1 + a_2 \mathbf{A}_2 + a_3 \mathbf{A}_3 + a_4 \mathbf{A}_4, a_i \in \mathbb{R}\}$$

es el conjunto de vectores que son combinación lineal de las columnas $\mathbf{A}_i$ de la matriz A . Para determinar una base, podemos reducir la matriz A a forma escalonada (como hicimos antes):

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \downarrow \boxed{3} & \downarrow 5 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las variables pivote se corresponden con las columnas 1 y 2, por tanto, una base del espacio columna estará formada por las correspondientes columnas de la matriz A

$$B = ((3, 0, 6)^t, (5, 1, 11)^t).$$

La dimensión del espacio columna es, obviamente, 2.

3) **Espacio fila:** $\mathcal{C}(A^t)$ es generado por dos filas de la matriz A , las que corresponden a las filas no nulas en la forma escalonada obtenida o, equivalentemente, las que contienen los coeficientes de las variables pivote en la forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \rightarrow \boxed{3} & 5 & 3 & 6 \\ \rightarrow 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así $\mathcal{C}(A^t) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4: \mathbf{v} = b_1(3, 5, 3, 6)^t + b_2(0, 1, 4, -1)^t, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\}$. La dimensión del espacio fila es también 2.

- 4) **Espacio nulo de la traspuesta:** $N(A^t)$ es el conjunto de vectores de la forma $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^t$ que satisfacen $A^t \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ó también

$$(v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 0).$$

Si escribimos la matriz aumentada del sistema lineal $A^t \mathbf{v} = \mathbf{0}$ y hallamos su forma escalonada, resulta:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 11 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 10 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 11 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} N(A^t) &= \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^t: v_1 = -2v_3, v_2 = -v_3\} \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3: \mathbf{v} = v_3(-2, -1, 1)^t, v_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Obviamente, la dimensión del espacio nulo de la traspuesta es $3 - 2 = 1$.

Una manera alternativa para obtener el espacio nulo de la traspuesta simultáneamente a los otros espacios (con menos cálculos) consiste en escribir

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 11 & 10 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y reducirla a forma escalonada:

$$(U|J) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

La última fila de J , $(2, 1, -1)^t$ proporciona una base del espacio nulo de la traspuesta, como ya sabíamos.

4.2.1. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ y sea $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base de V . El siguiente teorema es clave en muchos de los resultados que veremos en el curso:

Teorema de representación única

Sea $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ una base del espacio vectorial V . Todo vector $\mathbf{v} \in V$ se puede expresar de forma única como combinación lineal de los vectores de B :

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{b}_1 + \dots + v_n \mathbf{b}_n.$$

Como establece el teorema de representación única, si $\mathbf{v} \in V$, podremos escribir $\mathbf{v}$ de la forma

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{b}_1 + \dots + v_n \mathbf{b}_n,$$

donde $v_1, \dots, v_n$ son escalares ($\in \mathbb{K}$). Así, podemos asociar a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único con respecto a la base B $[\mathbf{v}]_B \in \mathbb{K}^n$ dado por $[\mathbf{v}]_B = (v_1, \dots, v_n)^t$. Este vector se denomina **vector de coordenadas** de $\mathbf{v}$ con respecto a la base B . Nos referiremos a los escalares v_i ($i = 1, \dots, n$) como **coordenadas de $\mathbf{v}$ en $\mathbb{K}^n$ con respecto a B** .

NOTA: es importante darse cuenta de que *solamente* en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con la base

canónica B_0 se cumple que

$$\boxed{\mathbf{v} = [\mathbf{v}]_{B_0}} = B_0[\mathbf{v}]_{B_0} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) [\mathbf{v}]_{B_0}.$$

En un espacio vectorial V de dimensión n con una base arbitraria B no se puede identificar el vector $\mathbf{v}$ con el vector de sus coordenadas $[\mathbf{v}]_B \in \mathbb{K}^n$ en dicha base. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

Ejemplo

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$. Es sencillo demostrar que $B = (1, x)$ es una base de este espacio. Cualquier polinomio $p(x) = a_0 + a_1x$ puede representarse mediante el vector de coordenadas con respecto a la base B :

$$[\mathbf{p}]_B = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que $p \neq [\mathbf{p}]_B$; p es un polinomio y $[\mathbf{p}]_B$ es un vector de $\mathbb{R}^2$: el segundo es una útil *representación* del primero.

Sea un espacio vectorial V de dimensión n . En él definimos una base $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$. Dado un vector cualquiera $\mathbf{a} \in V$, existe una única combinación lineal

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \dots + a_n\mathbf{b}_n,$$

que define las coordenadas $[\mathbf{a}]_B = (a_1, a_2, \dots, a_n)^t$ de $\mathbf{a}$ en la base B . Podemos recuperar el vector original escribiéndolo en forma de producto matricial:

$$\mathbf{a} = B [\mathbf{a}]_B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n) [\mathbf{a}]_B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Nótese que, aunque definimos en el Tema 1 que las entradas de las matrices eran escalares, en la fórmula anterior los elementos del vector fila $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ no son escalares, sino vectores (tal y como indica la negrita). Obsérvese que la regla del producto sigue siendo la misma; aunque el resultado es un vector, no un escalar.

4.3. Cambio de base

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ existe una base canónica natural que viene dada por

$$B_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = ((1, 0, 0, \dots, 0, 0)^t, (0, 1, 0, \dots, 0, 0)^t, \dots, (0, 0, 0, \dots, 0, 1)^t) .$$

Sin embargo, en muchas ocasiones es más eficiente trabajar en otras bases en $\mathbb{R}^n$. En otros espacios vectoriales no existe una base canónica natural y, en muchos cálculos prácticos, es conveniente elegir una base adecuada para realizarlos.

Es importante recordar que un vector $\mathbf{v} \in V$ es un objeto abstracto que existe sin necesidad de establecer una base para el espacio vectorial V . Al fijar una base B en V podemos obtener las coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto a dicha base $[\mathbf{v}]_B$. Estas coordenadas dependen obviamente de la base escogida: si elegimos otra base B' , las coordenadas del vector $\mathbf{v}$ serán $[\mathbf{v}]_{B'}$ y, en general, serán diferentes de $[\mathbf{v}]_B$.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial V formado por los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales de grado menor que 5 y que sólo contienen potencias pares de x :

$$V = \{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} .$$

Sea ahora el polinomio p dado por la expresión $p(x) = x^4 - 2x^2$. La gráfica de este

polinomio está representada en la figura 4.1. Una base posible de V es la siguiente

$$B_1 = (p_1, p_2, p_3) = (1, x^2, x^4).$$

y las coordenadas de p en esta base son obviamente

$$[p]_{B_1} = (0, -2, 1)^t,$$

ya que

$$p(x) = (p_1, p_2, p_3) [p]_{B_1} = (p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2p_2 + p_3 = x^4 - 2x^2.$$

Otra base posible de V es la siguiente

$$B_2 = (q_1, q_2, q_3) = (1, x^2 - 1, (x^2 - 1)^2)$$

y las coordenadas de p en esta base son (después de un poco de álgebra)

$$[p]_{B_2} = (-1, 0, 1)^t,$$

ya que

$$p(x) = (q_1, q_2, q_3) [p]_{B_2} = (q_1, q_2, q_3) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -q_1 + q_3 = x^4 - 2x^2.$$

Como se puede observar, el polinomio p no depende de la base elegida para representarlo (en otras palabras, la gráfica de $p(x)$ no depende de la base). Sin embargo, las coordenadas de dicho polinomio sí dependen de la base elegida.

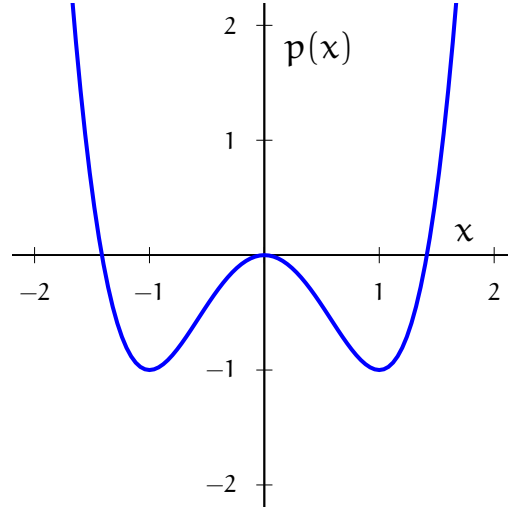


Figura 4.1: Gráfica del polinomio $p(x) = x^4 - 2x^2$.

Vamos a estudiar cómo varían las coordenadas de un vector $\mathbf{v} \in V$ respecto a una base B cuando usamos una nueva base B' . Para ello definimos primero la **matriz de cambio de base** $T_{BB'}$. La definición de esta matriz **no** es universal, ya que en algunos libros se usa, en vez de $T = T_{BB'}$, su inversa T^{-1} .

Sea un espacio vectorial V de dimensión n . En él definimos dos bases distintas $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ y $B' = (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \dots, \mathbf{b}'_n)$. La **matriz de cambio de base** $T_{BB'}$ (de dimensión $n \times n$) se define mediante la ecuación

$$B' = B T_{BB'} \Leftrightarrow (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \dots, \mathbf{b}'_n) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n) T_{BB'}. \quad (4.2)$$

En otras palabras, la columna i -ésima T_i de la matriz $T = T_{BB'}$ contiene las coordenadas del vector $\mathbf{b}'_i$ de la “nueva” base B' respecto de la base “antigua” B : $T_i = [\mathbf{b}'_i]_B$. De otra manera:

$$T_{BB'} = ([\mathbf{b}'_1]_B, [\mathbf{b}'_2]_B, \dots, [\mathbf{b}'_n]_B).$$

La matriz $T_{BB'}$ se denotará simplemente por T cuando las bases B y B' estén bien definidas en el contexto del problema.

La matriz de cambio de base $T_{BB'}$ es una matriz no singular ($\det(T_{BB'}) \neq 0$), ya que sus columnas son linealmente independientes.

Ejemplo

Supongamos que queremos usar la base $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, donde las coordenadas de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, respecto de la base canónica $B_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, son

$$\mathbf{u}_1 = (3, 2)^t, \quad \mathbf{u}_2 = (1, 1)^t.$$

La matriz asociada al cambio de base $B_0 \rightarrow B_1$ viene dada por la fórmula (4.2): cada columna contiene las coordenadas del vector correspondiente de la base B_1 en la base B_0

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) T_{B_0 B_1} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si desarrollamos esta ecuación, vemos que es equivalente a:

$$\mathbf{u}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

tal y como ya sabíamos.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ de los polinomios de grado ≤ 1 con coeficientes reales. Tenemos la base de este espacio

$$B_1 = (1, x)$$

y queremos expresar los polinomios de $\mathbb{P}_1$ en función de la base

$$B_2 = (1 + x, 1 - x),$$

donde la demostración de que B_2 es efectivamente una base de $\mathbb{P}_1$ de deja como

ejercicio.

La matriz asociada al cambio de base $B_1 \rightarrow B_2$ viene dada por la fórmula (4.2):

$$(1 + x, 1 - x) = (1, x) T_{B_1 B_2} = (1, x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si desarrollamos esta ecuación, vemos que es equivalente a las tautologías

$$1 + x = 1 + x$$

$$1 - x = 1 - x,$$

tal y como debe ser.

Si tenemos un vector $x \in V$ en un espacio vectorial V de dimensión n y calculamos sus coordenadas $[x]_B = (x_1, \dots, x_n)^t$ y $[x]_{B'} = (x'_1, \dots, x'_n)^t$ respecto a dos bases distintas $B = (b_1, \dots, b_n)$ y $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ de V y que están relacionadas mediante la matriz de cambio de base $T_{BB'}$, entonces:

$$\begin{aligned} x &= B [x]_B = (b_1, b_2, \dots, b_n) [x]_B \\ &= B' [x]_{B'} = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n) [x]_{B'}. \end{aligned}$$

Dado que $(b'_1, b'_2, \dots, b'_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) T_{BB'}$, entonces

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) [x]_B = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n) [x]_{B'} = (b_1, b_2, \dots, b_n) T_{BB'} [x]_{B'}.$$

De esta ecuación se ve cómo se transforman las coordenadas del vector x al cambiar de base $B \rightarrow B'$:

$$[x]_B = T_{BB'} [x]_{B'}.$$

Aunque la fórmula fundamental es (4.2), que define la matriz de cambio de base $B \rightarrow B'$, esta última fórmula nos dice cómo se transforman las coordenadas de cualquier vector

$\mathbf{x} \in V$ bajo dicho cambio de base. Si queremos escribir las coordenadas del vector $\mathbf{x}$ en la base “nueva” B' en función de sus coordenadas en la base “antigua” B , basta con multiplicar (por la izquierda) la ecuación anterior por $T_{BB'}^{-1}$:

$$[\mathbf{x}]_{B'} = T_{BB'}^{-1} [\mathbf{x}]_B.$$

Nótese que la matriz $T_{BB'}$ define el cambio de base (4.2), pero su inversa $T_{BB'}^{-1}$ es la que define el cambio de coordenadas.

Ejemplo

Supongamos que queremos cambiar de la base canónica $B_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ a una nueva base $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ donde las coordenadas de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ respecto a B_0 son

$$\mathbf{b}_1 = (3, 2)^t, \quad \mathbf{b}_2 = (1, 1)^t.$$

La matriz de cambio de base asociada a $B_0 \rightarrow B_1$ es, como ya vimos,

$$T_{B_0 B_1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es no singular y su inversa es

$$T_{B_0 B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si tenemos el vector $\mathbf{x} = (2, -1)^t$ en la base canónica B_0 , sus coordenadas en la nueva base B serán

$$[\mathbf{x}]_B = T_{B_0 B_1}^{-1} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Nótese que

$$\mathbf{x} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}.$$

Ejemplo

Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ de los polinomios de grado ≤ 1 con coeficientes reales. Queremos hacer el cambio de base desde la base $\mathbf{B}_1 = (1, x)$ a la nueva base $\mathbf{B}_2 = (1 + x, 1 - x)$.

La matriz de cambio de base $T_{\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2}$ viene dada por

$$T_{\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Su inversa es

$$T_{\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si tenemos el polinomio $p(x) = 2 - 3x \in \mathbb{P}_1$, sus coordenadas en la base $\mathbf{B}_1$ son obviamente $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_1} = (2, -3)^t$. Sus coordenadas en la base $\mathbf{B}_2$ vendrán dadas por:

$$[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_2} = T_{\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2}^{-1} [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La comprobación de este resultado es trivial:

$$p(x) = (1 + x, 1 - x) [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_2} = (1 + x, 1 - x) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 - 3x = (1, x) [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_1}.$$

Hay dos propiedades importantes que cumplen las matrices de cambio de base

1. Supongamos que hacemos el cambio de base $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}'$, lo que define la matriz de

cambio de base $T_{BB'}$. Si hiciésemos el cambio de base inverso $B' \rightarrow B$, entonces la matriz de este cambio de base es simplemente

$$T_{B'B} = T_{BB'}^{-1}.$$

Este resultado se obtiene de (4.2) multiplicando por la derecha por la matriz $T_{BB'}^{-1}$ (que siempre existe ya que $T_{BB'}$ es no singular). Esto implica que

$$[\mathbf{x}]_{B'} = T_{BB'}^{-1} [\mathbf{x}]_B = T_{B'B} [\mathbf{x}]_B.$$

2. Supongamos que hacemos dos cambios sucesivos de base. Primero vamos de la base $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ a la base $B' = (\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n)$ con la matriz de cambio de base $T_{BB'}$:

$$(\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n) = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) T_{BB'}.$$

Después cambiamos de la base B' a otra base $B'' = (\mathbf{b}''_1, \dots, \mathbf{b}''_n)$ con la matriz $T_{B'B''}$:

$$(\mathbf{b}''_1, \dots, \mathbf{b}''_n) = (\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n) T_{B'B''}.$$

Evidentemente podemos hacer este cambio de base en un solo paso $B \rightarrow B''$. La matriz de cambio de base $T_{BB''}$ vendría dada por:

$$(\mathbf{b}''_1, \dots, \mathbf{b}''_n) = (\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n) T_{B'B''} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) T_{BB'} T_{B'B''}.$$

Es decir,

$$T_{BB''} = T_{BB'} T_{B'B''}.$$

Ejemplo

Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ de los polinomios de grado ≤ 1 con coeficientes reales. Queremos hacer el cambio de base desde la base $B_1 = (1, x)$ a la nueva base $B_2 = (1+x, 1-x)$.

La matriz de cambio de base $T_{B_1 B_2}$ y su inversa vienen dadas por

$$T_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_{B_1 B_2}^{-1} = T_{B_2 B_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sea ahora una nueva base $B_3 = (1+2x, 1-2x)$. Para calcular la matriz $T_{B_2 B_3}$ debemos calcular las coordenadas de $1 \pm 2x$ en la base B_2 . Para ello hay que resolver los sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 1+2x &= \alpha(1+x) + \beta(1-x) = (\alpha+\beta) + x(\alpha-\beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=1, \\ \alpha-\beta=2. \end{cases} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{3}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-2x &= \alpha(1+x) + \beta(1-x) = (\alpha+\beta) + x(\alpha-\beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=1, \\ \alpha-\beta=-2. \end{cases} \\ \Rightarrow \alpha &= -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Luego la matriz de cambio de base $T_{B_2 B_3}$ y su inversa vienen dadas por

$$T_{B_2 B_3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_{B_2 B_3}^{-1} = T_{B_3 B_2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ya hemos visto que el vector $p(x) = 2-3x \in \mathbb{P}_1$ tiene coordenadas $[p]_{B_1} = (2, -3)^t$ en la base B_1 y coordenadas $(-1/2, 5/2)^t$ en B_2 . Sus coordenadas en la base B_3 vendrán

dadas por:

$$[\mathbf{p}]_{B_3} = T_{B_3 B_2} [\mathbf{p}]_{B_2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Por supuesto este resultado es el correcto:

$$p(x) = (1 + 2x, 1 - 2x) [\mathbf{p}]_{B_3} = (1 + 2x, 1 - 2x) \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 - 3x.$$

Si queremos hacer el cambio de base $B_1 \rightarrow B_3$ directamente, basta calcular

$$T_{B_1 B_3} = T_{B_1 B_2} T_{B_2 B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

que es el resultado esperado, ya que las columnas de $T_{B_1 B_3}$ contienen las coordenadas de los vectores de B_3 en la base B_1 . La inversa de esta matriz es

$$T_{B_1 B_3}^{-1} = T_{B_3 B_1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas de $\mathbf{p}$ en la base B_3 vienen dadas por

$$[\mathbf{p}]_{B_3} = T_{B_3 B_1} [\mathbf{p}]_{B_1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

La comprobación es simple:

$$p(x) = (1 + 2x, 1 - 2x) [\mathbf{p}]_{B_3} = (1 + 2x, 1 - 2x) \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 - 3x.$$

4.3.1. Cambio de coordenadas usando la base canónica

Frecuentemente, una de las bases del espacio vectorial con las que trabajamos es la canónica, B_0 . En este caso, la matriz de cambio de base $T_{B_0B_1}$ a otra base B_1 es particularmente sencilla, como hemos visto. En cambio, si trabajamos con bases arbitrarias B_1 y B_2 , el cálculo de las coordenadas de los vectores de una base con respecto a la otra puede ser engorroso. Una alternativa habitual consiste en lo siguiente. Dada la base B_1 , podemos calcular la matriz de cambio de base $T_{B_0B_1}$ de B_0 a B_1 . De igual manera, dada la base B_2 , podemos hallar su correspondiente matriz de cambio de base $T_{B_0B_2}$ de B_0 a B_2 . La idea consiste en, en vez de hacer directamente el cambio de base $B_1 \rightarrow B_2$, hacer el cambio de base pasando por la base canónica B_0 : $B_1 \rightarrow B_0 \rightarrow B_2$. Entonces

$$T_{B_1B_2} = T_{B_1B_0} T_{B_0B_2} = T_{B_0B_1}^{-1} T_{B_0B_2},$$

de manera que ahora sólo tenemos que trabajar con las matrices $T_{B_0B_1}$ y $T_{B_0B_2}$ cuya obtención es sencilla. El precio a pagar es que hay que invertir una de ellas y efectuar una multiplicación entre dos matrices.