

Álgebra Lineal

Tema 7. Forma normal de una transformación

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración
de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad **Carlos III** de Madrid



Índice general

7. Forma normal de una transformación	1
7.1. Recordatorio sobre el cambio de base	1
7.2. Forma normal de una transformación lineal	2
7.2.1. Cambio de base como transformación lineal	3
7.2.2. Cálculo de la forma normal	5

Tema 7

Forma normal de una transformación

7.1. Recordatorio sobre el cambio de base

En el Tema 4 estudiamos cómo cambian las coordenadas $[\mathbf{u}]_B$ de un vector $\mathbf{u} \in U$ respecto a una base B cuando cambiamos dicha base por una nueva base B' . En este apartado vamos a recordar brevemente las fórmulas básicas.

Supongamos que tenemos un espacio vectorial U de dimensión n . En dicho espacio tenemos una base $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, de manera que a cada vector $\mathbf{u} \in U$ le podemos asociar un vector columna con sus coordenadas en dicha base:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{b}_i \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{u}]_B = (u_1, \dots, u_n)^t,$$

de manera que podemos escribir

$$\mathbf{u} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) [\mathbf{u}]_B = B [\mathbf{u}]_B.$$

Definimos ahora una nueva base $B' = (\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n)$ en U . En esta base cada vector $\mathbf{u} \in U$ tendrá una ciertas coordenadas $[\mathbf{u}]_{B'}$ dadas por

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u'_i \mathbf{b}'_i \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{u}]_{B'} = (u'_1, u'_2, \dots, u'_n)^t$$

y también se cumple que

$$\mathbf{u} = (\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n) [\mathbf{u}]_{B'} = B' [\mathbf{u}]_{B'}.$$

La matriz de cambio de base $T_{BB'}$ se define de la manera habitual

$$T_{BB'} = ([\mathbf{b}'_1]_B, [\mathbf{b}'_2]_B, \dots, [\mathbf{b}'_n]_B),$$

de manera que

$$B' = (\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n) = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) T_{BB'} = B T_{BB'}.$$

Con esta definición se tiene que las coordenadas cambian como sigue:

$$[\mathbf{u}]_B = T_{BB'} [\mathbf{u}]_{B'},$$

$$[\mathbf{u}]_{B'} = T_{B'B} [\mathbf{u}]_B = T_{BB'}^{-1} [\mathbf{u}]_B.$$

La matriz $T_{BB'}$ es siempre invertible. Si hacemos dos cambios sucesivos de base $B \rightarrow B' \rightarrow B''$, entonces se cumple que

$$T_{BB''} = T_{BB'} T_{B'B''}.$$

7.2. Forma normal de una transformación lineal

En el Tema 6 estudiamos cómo expresar una transformación lineal $T : U \rightarrow V$ por medio de una matriz referida a unas bases dadas de U y V . Si disponemos de otras bases distintas, es posible calcular la nueva matriz asociada a T , referida a éstas bases, con un cálculo sencillo, como veremos a continuación. Adicionalmente, dada la transformación lineal T , vamos a estudiar un procedimiento que nos permitirá encontrar ciertas bases con respecto a las cuales la matriz asociada tiene una forma por *bloques* particularmente sencilla.

7.2.1. Cambio de base como transformación lineal

Consideremos un espacio vectorial V de dimensión n y sean $B_1 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ y $B_2 = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ dos bases de V . Para cualquier transformación lineal $T : V \rightarrow V$ y fijadas las bases B_1 y B_2 , podemos encontrar una representación matricial respecto a dichas bases dada por

$$A_{T, B_2 B_1} = ([T(\mathbf{v}_1)]_{B_2}, [T(\mathbf{v}_2)]_{B_2}, \dots, [T(\mathbf{v}_n)]_{B_2}),$$

de manera que

$$[T(\mathbf{v})]_{B_2} = A_{T, B_2 B_1} [\mathbf{v}]_{B_1}.$$

Si consideramos ahora la *transformación identidad* $T = I$, que asocia a cada vector él mismo (es decir, $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$), su representación respecto a las bases anteriores se obtiene usando $I(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$ para todo $1 \leq i \leq n$:

$$A_{I, B_2 B_1} = ([\mathbf{v}_1]_{B_2}, [\mathbf{v}_2]_{B_2}, \dots, [\mathbf{v}_n]_{B_2}) = T_{B_2 B_1},$$

donde $T_{B_2 B_1}$ es la matriz de cambio de base de B_2 a B_1 . Entonces

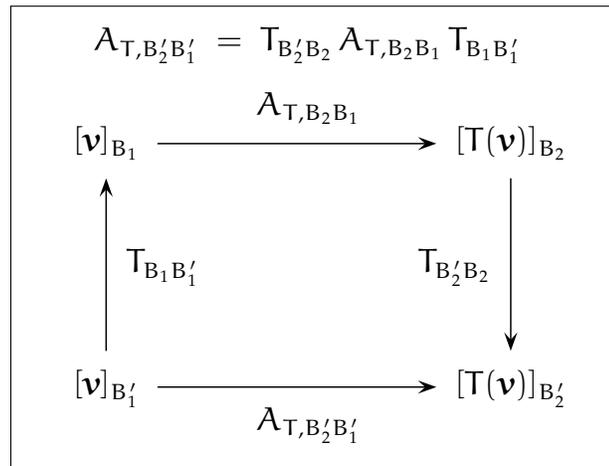
$$[\mathbf{v}]_{B_2} = A_{I, B_2 B_1} [\mathbf{v}]_{B_1} = T_{B_2 B_1} [\mathbf{v}]_{B_1}.$$

Esta ecuación es equivalente a que la imagen por $T = I$ de cualquier vector $\mathbf{v} \in V$ es $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, como ya sabíamos.

Ya sabemos que toda matriz de cambio de base, equivalente a la matriz identidad, es invertible. Inversamente, toda matriz invertible se puede considerar como una matriz de cambio de base para pasar de una base B a una nueva base B' , en la que sus columnas son las coordenadas de los vectores de la nueva base B' con respecto a la base B .

Finalmente, si usamos las matrices de cambio de base para definir una transformación lineal, es inmediata la relación que existe entre las diferentes matrices asociadas a una misma transformación lineal $T : U \rightarrow V$, referidas a bases distintas.

En efecto, si consideramos las bases B_1 y B'_1 del espacio vectorial U y las bases B_2 y B'_2 del espacio V , cualquier vector $\mathbf{v} \in U$ se transforma en $T(\mathbf{v})$ como se indica en el siguiente diagrama:



Es claro entonces que:

$$\mathbf{A}_{T, B'_2 B'_1} = T_{B'_2 B_2} \mathbf{A}_{T, B_2 B_1} T_{B_1 B'_1} = T_{B_2 B'_2}^{-1} \mathbf{A}_{T, B_2 B_1} T_{B_1 B'_1}.$$

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_1$ dada por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x$, que obviamente es lineal. Consideremos las bases $B_1 = (1, x, x^2)$ y $B'_1 = (1, 1 + x, 1 + x + x^2)$ de \mathbb{P}_2 y $B_2 = (1, x)$ y $B'_2 = (1 - x, 1 + x)$ de \mathbb{P}_1 . La representación matricial de T respecto a las bases (canónicas) B_1 y B_2 es:

$$\mathbf{A}_{T, B_2 B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, las matrices de cambio de base son:

$$T_{B_1 B'_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{B'_2 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la representación matricial de T respecto a las bases B'_1 y B'_2 puede escribirse de la forma:

$$A_{T, B'_2 B'_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.2.2. Cálculo de la forma normal

Consideremos la transformación lineal $T : U \rightarrow V$, donde los espacios vectoriales U y V tienen dimensiones respectivas m y n . Si denotamos el rango de la transformación por $r = \text{rg}(T)$, el procedimiento descrito a continuación nos permitirá encontrar una base B_1 de U y una base B_2 de V tales que la representación matricial de T con respecto a B_1 y B_2 sea de la forma:

$$A_{T, B_2 B_1} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r \times (m-r)} \\ \hline 0_{(n-r) \times r} & 0_{(n-r) \times (m-r)} \end{array} \right),$$

conocida como **forma normal** de la representación (*matriz*) de la transformación lineal. Obsérvese que esta matriz es diagonal por bloques.

Por una parte, sean B'_1 y B'_2 bases cualesquiera de U y V , respectivamente. Consideremos la matriz asociada a T con respecto a dichas bases $A_{T, B'_2 B'_1}$.

Por otra parte, construimos las bases B_1 y B_2 de la siguiente manera.

- Obtenemos una base de $\ker(T)$ (de dimensión $m - r$). Denotamos los $m - r$ vectores que la forman por $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m$. A continuación, extendemos ésta a una base de U añadiendo r vectores linealmente independientes, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$. Es decir:

$$B_1 = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \underbrace{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m}_{\text{base de } \ker(T)}).$$

- A continuación obtenemos una base de $\text{Im}(T)$ de la forma $\mathbf{v}_i = T(\mathbf{u}_i)$ (para todo $1 \leq i \leq r$) y la extendemos a una base de V añadiendo $n - r$ vectores linealmente independientes:

$$B_2 = (\underbrace{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r}_{\text{base de } \text{Im}(T)}, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Entonces, la matriz asociada a T respecto a las bases B_1 y B_2 toma la forma

$$A_{T, B_2 B_1} = T_{B_2 B_2'} A_{T, B_2' B_1'} T_{B_1' B_1},$$

que es la representación normal de la transformación T .

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)^t) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^t.$$

El núcleo de T será

$$\ker(T) = \{\mathbf{u}_1 (1, 1, -2)^t : \mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}\} = \text{Gen}((-1, -1, 2)^t).$$

Completamos una base de \mathbb{R}^3 con dos vectores linealmente independientes de $\mathbf{v}_3 = (-1, -1, 2)^t$: por ejemplo, $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)^t$ y $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)^t$.

A continuación hallamos una base de \mathbb{R}^2 mediante $T(\mathbf{v}_1) = (2, 1)^t$ y $T(\mathbf{v}_2) = (2, -1)^t$. Obsérvese que en este caso no es necesario extender la base, ya que $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$.

Para simplificar la escritura, vamos a *abusar de la notación* y vamos a representar por B_0 la base canónica tanto de \mathbb{R}^3 como de \mathbb{R}^2 . La matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 (eliminando la referencia a éstas en el subíndice) viene dada por

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces las matrices de cambio de base entre las bases calculadas y las respectivas bases canónicas son:

$$T_{B_0 B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T_{B_0 B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la representación normal de T será la matriz asociada a T referida a las bases B_1 y B_2 , que calculamos mediante

$$\begin{aligned} A_{T, B_2 B_1} &= T_{B_2 B_0} A_T T_{B_0 B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$