Álgebra Lineal

Hoja 1. Matrices

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 1

Matrices

Problema 1.1 Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} ; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} ;$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} ; \qquad E = (4, 2) ; \qquad F = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} ;$$

realizar, si es posible, las siguientes operaciones:

1. $3\,D - 2\,A$.
2. $B - C^t$.
3. $D + B\,C$.
4. $B^t\,B$.
5. $E\,A\,F$.
6. $B^t\,C^t - (C\,B)^t$.

Problema 1.2 Obtener la inversa de las siguientes matrices:

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 1.3 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

y supongamos que

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es su inversa. Determinar B resolviendo el sistema $A\,B = I_2$.

Problema 1.4 Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

comprobar que $A^2 - 2A + 13I_2 = 0$ y utilizar esta expresión para deducir el valor de A^{-1}.

Problema 1.5 Si A es idempotente, probar que $B = I - A$ también lo es.

Problema 1.6 Probar que si A y B son matrices ortogonales cuadradas (es decir, que $A^{-1} = A^t$ y $B^{-1} = B^t$) y el producto $A\,B$ existe, entonces $A\,B$ es también ortogonal.

Problema 1.7 Mostrar con un ejemplo que $A\,B = C\,B$ no implica que $A = C$. ¿En qué caso sí se verifica necesariamente?

Problema 1.8 Sea A una matriz $n \times 1$ (vector columna) tal que $A^t\,A = 1$. Construimos las matrices $B = I_n - A\,A^t$ y $C = I_n - 2\,A\,A^t$. Probar que B es idempotente y que $C^2 = I_n$.

Problema 1.9 Demostrar que si A es una matriz cuadrada ortogonal, entonces $\det(A) = \pm 1$. Encontrar una matriz 2×2 que muestre que el resultado inverso no es cierto.

Problema 1.10 Probar que si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$, entonces $\mathrm{tr}(A\,B) = \mathrm{tr}(B\,A)$.

Problema 1.11 Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x & 0 & 1 \\ 2 & x & -2 \end{pmatrix},$$

calcular los valores reales del parámetro x para los que A no tiene inversa.

Hoja 1

Soluciones

Problema 1.1 Las soluciones son directas:

1. $3\,D - 2\,A = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.

2. $B - C^t = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

3. $D + B\,C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 19 & 27 \end{pmatrix}$.

4. $B^t\,B = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

5. $E\,A\,F = 10$.

6. $B^t\,C^t - (C\,B)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 1.2 Las inversas son:

$$\text{a)}\quad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 4 & -20 & -21 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)}\quad B^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -9 & 14 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 1.3 La matriz A no tiene inversa porque $\det(A) = 0$.

Problema 1.4 Multiplicando la ecuación por A^{-1} por la izquierda, se obtiene

$$A^{-1} = -\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 1.5 Como $A\,A = A$, entonces $B\,B = (I - A)\,(I - A) = I + A - 2\,A = I - A = B$.

Problema 1.6 La demostración es simple: $(A\,B)^t = B^t\,A^t = B^{-1}\,A^{-1} = (A\,B)^{-1}$. Luego $A\,B$ es también una matriz ortogonal.

Problema 1.7 Para que se verifique, es necesario que B sea invertible, ya que en dicho caso podemos multiplicar por la derecha a la expresión dada:

$$A = A\,B\,B^{-1} = C\,B\,B^{-1} = C\,.$$

Luego debemos buscar un contraejemplo en la clase de matrices B que no son invertibles. Por ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que satisface $\det(B) = 0$. Las matrices A y C pueden ser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Problema 1.8 Si $B = I_n - A\,A^t$, entonces $B^2 = I_n - 2A\,A^t + A\,A^t\,A\,A^t = I_n - 2A\,A^t + A\,A^t = I_n - A\,A^t = B$. Luego B es idempotente. Además $C^2 = I_n - 4A\,A^t + 4A\,A^t\,A\,A^t = I_n - 4A\,A^t + 4A\,A^t = I_n$.

Problema 1.9 Si A es ortogonal, entonces $1 = \det(I) = \det(A\,A^{-1}) = \det(A\,A^t) = \det(A)\det(A^t) = \det(A)^2$. Luego $\det(A) = \pm 1$. Un contrejemplo para el resultado inverso puede ser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $\det(A) = 1$, pero no es ortogonal.

Problema 1.10 Claramente

$$(A\,B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj}\,,$$

de manera que

$$\mathrm{tr}(A\,B) = \sum_{i=1}^{m} (A\,B)_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{ki}\,.$$

Si intercambiamos las dos sumas,

$$\mathrm{tr}(A\,B) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\,b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}\,a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (B\,A)_{kk} = \mathrm{tr}(B\,A)\,.$$

Problema 1.11 Si calculamos $\det(A)$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x & 0 & 1 \\ 2 & x & -2 \end{vmatrix} = 2x^2 - 3x - 2 = (2x+1)(x-2)\,,$$

el determinante se anula en $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = 2$. Luego para dichos valores la matriz A no tiene inversa.