Álgebra Lineal

Hoja 4. Base y dimensión

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 4

Base y dimensión

Problema 4.1 Comprobar si el vector $(3, 4, 4)^t$ pertenece al conjunto generado por los vectores $\{(1, 2, 3)^t, (-1, 0, 2)^t\}$ y, en tal caso, determinar cómo obtenerlo con alguna combinación lineal.

Problema 4.2 Probar que el conjunto de vectores $\{(1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t, (0, 0, 1)^t, (1, 2, 3)^t\}$ es linealmente dependiente. Probar que el conjunto de vectores $\{(0, 1, 0)^t, (0, 0, 1)^t, (1, 2, 3)^t\}$ es linealmente independiente.

Problema 4.3 Decidir si los polinomios $p_1(x) = 1-x+x^2$, $p_2(x) = 2+x$ y $p_3(x) = 1+2x-x^2$ son linealmente dependientes o independientes en $\mathbb{P}_2$. Si son linealmente dependientes, encontrar alguna de las posibles dependencias.

Problema 4.4 Decidir si las matrices de $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes o independientes.

Problema 4.5 Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ y su subespacio W generado por los vectores $v_1(x) = 1$ y $v_2(x) = x^2 - 3$.

1. Encontrar un subconjunto de $B = \{1, x^2 - 3\}$ que sea base de W. ¿Cuál es la dimensión de W?

2. Determinar si los vectores $p(x) = 5x + x^2$ y $q(x) = 3 - x^2$ son elementos de W. En el caso de que lo sean, determinar las coordenadas de p y q respecto a la base encontrada en el apartado anterior.

3. Determinar las coordenadas de p y q respecto a la base de $\mathbb{P}_2$ dada por $B' = (1 - x, 1 + x, x^2)$.

Problema 4.6 Sea el conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

1. Probar que es un conjunto linealmente independiente.

2. Probar que la matriz

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

   pertenece a $W = Gen(B)$.

3. Hallar las coordenadas de A con respecto a la base B' de W obtenida a partir de B.

Problema 4.7 Determinar los espacios asociados a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y las correspondientes dimensiones.

Problema 4.8 Sea A la matriz 4×5 dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 9 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Encontrar el espacio nulo de A, su dimensión y una base.
2. Encontrar el espacio columna de A, su dimensión y una base.
3. Encontrar el espacio fila de A, su dimensión y una base.
4. Encontrar el espacio nulo de la traspuesta de A, su dimensión y una base.

Problema 4.9 Sea el conjunto $B = \{(1,1,0)^t, (1,2,1)^t, (2,1,0)^t\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Probar que a partir de B se puede construir una base B' de $\mathbb{R}^3$.
2. Encontrar las coordenadas del vector $\boldsymbol{v} = (3,-2,1)^t$ con respecto a B' (resolviendo un sistema).
3. Encontrar las coordenadas del vector $\boldsymbol{w}$ con respecto a la base canónica si se sabe que sus coordenadas respecto a la base B' son $[\boldsymbol{w}]_{B'} = (2,-1,7)^t$ (resolviendo un sistema).
4. Encontrar las matrices de cambio de base para pasar de B_0 a B' y de B' a B_0.
5. Comprobar que las coordenadas de los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ halladas en los apartados anteriores se obtienen multiplicando la matriz de cambio de base adecuada por las coordenadas conocidas.

Problema 4.10 Sea el espacio $\mathbb{P}_3$ con bases $B_0 = (1, x, x^2, x^3)$, $B_1 = (1+x, x+x^2, x^2-x^3, 1+2x^3)$ y $B_2 = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$.

1. Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B_0 a B_1.
2. Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B_0 a B_2.
3. Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B_1 a B_2.
4. Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 2x$. Hallar sus coordenadas con respecto a B_0, B_1 y B_2.

Hoja 4

Soluciones

Problema 4.1 Basta ver que

$$(3,4,4)^t = 2(1,2,3)^t - (-1,0,2)^t\,.$$

Problema 4.2 El sistema

$$a(1,0,0)^t + b(0,1,0)^t + c(0,0,1)^t + d(1,2,3)^t = (0,0,0)^t$$

es compatible indeterminado ($a = -d, b = -2d, c = -3d$). El sistema

$$b(0,1,0)^t + c(0,0,1)^t + d(1,2,3)^t = (0,0,0)^t$$

tiene sólo la solución trivial $b = c = d = 0$.

Problema 4.3 Si resolvemos el sistema

$$ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = 0\,,$$

obtenemos un sistema compatible indeterminado: $p_1 - p_2 + p_3 = 0$. Luego $p_3 = -p_1 + p_2$.

Problema 4.4 Son linealmente dependientes ya que:

$$A = -2B + C\,.$$

Problema 4.5

1. $B_1 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ es una base de W con $\dim(W) = 2$.

2. $\mathbf{p} \notin W$ y $\mathbf{q} \in W$. Además, $[\mathbf{q}]_{B_1} = (0, -1)^t$.

3. $[\mathbf{p}]_{B'} = \dfrac{1}{2}\,(-5, 5, 2)$ y $[\mathbf{q}]_{B'} = \dfrac{1}{2}\,(3, 3, -2)$.

Problema 4.6

1. Si $B = \{B_1, B_2\}$, entonces el sistema

$$aB_1 + cB_2 = 0_{2\times 0}$$

   sólo tiene la solución trivial $a = c = 0$. Luego $B' = (B_1, B_2)$ es una base.

2. Es fácil ver que $A = 3B_1 - 5B_2$.

3. $[A]_{B'} = (3, -5)^t$.

Problema 4.7

- $N(A) = \{(0,0)^t\}$ con $\dim(N(A)) = 0$.
- $\mathcal{C}(A) = \mathrm{Gen}\left((3, 2, -1)^t, (1, 0, -1)^t\right)$ con $\dim(\mathcal{C}(A)) = 2$.
- $N(A^t) = \mathrm{Gen}\left((1, -1, 1)^t\right)$ con $\dim(N(A^t)) = 1$.
- $\mathcal{C}(A^t) = \mathrm{Gen}\left((3, 1)^t, (2, 0)^t\right)$ con $\dim(\mathcal{C}(A^t)) = 2$.

Problema 4.8

1. $N(A) = \mathrm{Gen}\left((3, -1, 0, -3, 1)^t, (3, -2, 1, 0, 0)^t\right)$ con $\dim(N(A)) = 2$.

2. $\mathcal{C}(A) = \mathrm{Gen}\left((1, 0, -1, 0)^t, (2, 1, 3, 1)^t, (1, 1, 1, 0)^t\right)$ con $\dim(\mathcal{C}(A)) = 3$.

3. $\mathcal{C}(A^t) = \mathrm{Gen}\left((1, 2, 1, 1, 2)^t, (0, 1, 2, 1, 4)^t, (0, 1, 2, 0, 1)^t\right)$ con $\dim(\mathcal{C}(A^t)) = 3$.

4. $N(A^t) = \mathrm{Gen}\left((1,-2,1,-3)^t\right)$ con $\dim(N(A^t)) = 1$.

Problema 4.9

1. Si $B' = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, entonces el sistema $(0,0,0)^t = a\mathbf{b}_1 + b\mathbf{b}_2 + c\mathbf{b}_3$ tiene sólo la solución trivial $a = b = c = 0$. Luego son linealmente independientes y $\mathrm{card}(B') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

2. $[\boldsymbol{v}]_{B'} = (-10, 1, 6)^t$.

3. $[\boldsymbol{w}]_{B_0} = (15, 7, -1)^t$.

4. Las matrices buscadas son

$$T_{B_0B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_{B'B_0} = T_{B_0B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. $[\boldsymbol{v}]_{B'} = T_{B_0B'}\,[\boldsymbol{w}]_{B_0}$ y $[\boldsymbol{w}]_{B_0} = T_{B'B_0}\,[\boldsymbol{v}]_{B'}$.

Problema 4.10

1. $T_{B_0B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

2. $T_{B_0B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $\mathsf{T}_{B_1B_2} = \mathsf{T}^{-1}_{B_0B_1}\,\mathsf{T}_{B_0B_2} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

4. $[\mathbf{p}]_{B_0} = (0, -2, 0, 1)^t$; $[\mathbf{p}]_{B_1} = \mathsf{T}^{-1}_{B_0B_1}\,[\mathbf{p}]_{B_0} = (-1, -1, 1, 1)^t$; $[\mathbf{p}]_{B_2} = \mathsf{T}^{-1}_{B_0B_2}\,[\mathbf{p}]_{B_0} = (2, -2, -1, 1)^t$ y además se cumple que $[\mathbf{p}]_{B_2} = \mathsf{T}^{-1}_{B_1B_2}\,[\mathbf{p}]_{B_1} = (2, -2, -1, 1)^t$.