Álgebra Lineal

Hoja 5. Transformaciones lineales

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. Salas, A. Torrente y E.J.S. Villaseñor

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 5

Transformaciones lineales

Problema 5.1 Decidir si las siguientes transformaciones son lineales:

a) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$, definida por $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 x$.

b) $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, con $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las funciones continuas que están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ y $T(f)) = \displaystyle\int_1^x |f(t)|\, dt$.

c) $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, definida por $T(A) = A^t$.

d) $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, definida por $T(A) = A^t\, A$.

e) $T : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n-1}$, definida por $T(p) = \dfrac{dp}{dx}(x)$.

f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $T\left((a_1, a_2)^t\right) = a_1 + a_2$.

g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(\boldsymbol{v}) = A\,\boldsymbol{v}$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

h) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T((x, y)^t) = 2\,(x, y)^t + (x, -y)^t$.

Problema 5.2 Hallar el núcleo, la nulidad, la imagen y el rango de cada una de las aplicaciones del Problema 5.1 que sean efectivamente lineales. Indicar si son isomorfismos.

Problema 5.3 Consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 6 & \alpha \end{pmatrix}$$

y la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(\boldsymbol{v}) = A\,\boldsymbol{v}$.

1. ¿Para qué valores de α el vector $\boldsymbol{u} = (1, -1, 7)^t$ pertenece a la imagen de T?

2. ¿Para qué valores de α el vector $\boldsymbol{v} = (2, 1, -5, 0)^t$ pertenece al núcleo de T?

Problema 5.4 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que asocia a $\boldsymbol{u} = (1, 5)^t$ el vector $(2, 0)^t$ y asocia a $\boldsymbol{v} = (3, 1)^t$ el vector $(1, -4)^t$. Hallar la imagen por T de $(2, 10)^t$, $(9, 3)^t$ y $(-7, 7)^t$.

Problema 5.5 Consideremos $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^4$, definida por

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = (a_0, a_1 + 1, a_2, a_3)^t\,.$$

¿Es lineal la aplicación T?

Problema 5.6 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea T una aplicación lineal de V en sí mismo. Demostrar que T es un isomorfismo si y sólo si $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Obsérvese que esta propiedad se puede utilizar como alternativa para demostrar que una transformación lineal es o no un isomorfismo.

Problema 5.7 Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T((1, 0)^t) = (1, 1)^t$ y $T((0, 1)^t) = (1, -1)^t$.

1. Determinar la imagen de un elemento arbitrario $(x, y)^t$.

2. Indicar si T es inyectiva, suprayectiva, ambas cosas o ninguna.

3. Calcular las dimensiones de $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

Problema 5.8 Sea la aplicación $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, definida por

$$T(A) = A - \frac{\mathrm{tr}(A)}{n} I_n.$$

1. Demostrar que T es lineal.

2. Determinar el núcleo y la imagen de T.

3. Calcular las dimensiones de $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

Hoja 5

Soluciones

Problema 5.1 Son lineales las transformaciones (a), (c), (e), (f), (g) y (h).

Problema 5.2 Los apartados hacen referncia a las transformaciones del Problema 5.1 que son lineales:

a) $\mathrm{ker}(T) = \{a_0 + a_2x^2 \colon a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{nul}(T) = 2$, $\mathrm{Im}(T) = \{a_1 x \colon a_1 \in \mathbb{R}\}$ y $\mathrm{rg}(T) = 1$.

c) $\mathrm{ker}(T) = \{0\}$, $\mathrm{nul}(T) = 0$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathrm{rg}(T) = n^2$. Es un isomorfismo.

e) $\mathrm{ker}(T) = \mathbb{P}_0$, $\mathrm{nul}(T) = 1$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{P}_{n-1}$ y $\mathrm{rg}(T) = n$.

f) $\mathrm{ker}(T) = \mathrm{Gen}((1, -1)^t)$, $\mathrm{nul}(T) = 1$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{rg}(T) = 1$.

g) $\mathrm{ker}(T) = \{0\}$, $\mathrm{nul}(T) = 0$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ y $\mathrm{rg}(T) = 2$. Es un isomorfismo.

h) $\mathrm{ker}(T) = \{0\}$, $\mathrm{nul}(T) = 0$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ y $\mathrm{rg}(T) = 2$. Es un isomorfismo.

Problema 5.3

1. Siempre que $\alpha \neq -5$.

2. Para ningún valor de α.

Problema 5.4 Las imágenes son

$$T((2,10)^t) = (4,0)^t\,, \quad T((9,3)^t) = (3,-12)^t\,, \quad T((-7,7)^t) = (1,12)^t\,.$$

Problema 5.5 La aplicación T no es lineal.

Problema 5.6 Si $T\colon V \to V$ es isomorfismo, entonces es, en particular, inyectiva, por lo que $\ker(T) = \{0\}$. En sentido inverso, si $\ker(T) = \{0\}$, T es inyectiva; por otra parte, también será $\mathrm{nul}(T) = 0$ y, por tanto, $\mathrm{rg}(T) = \dim(V) - \mathrm{nul}(T) = \dim(V)$, es decir, es suprayectiva. En consecuencia, T es isomorfismo.

Problema 5.7

1. $T((x,y)^t) = (x+y, x-y)^t$.
2. T es un isomorfismo.
3. $\mathrm{nul}(T) = 0$ y $\mathrm{rg}(T) = 2$.

Problema 5.8

1. T es combinación lineal de aplicaciones lineales (la traza es un operador lineal).
2. $\ker(T) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A = k\, I_n, k \in \mathbb{R}\}, \quad \mathrm{Im}(T) = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon \mathrm{tr}(B) = 0\}$.
3. $\mathrm{nul}(T) = 1, \quad \mathrm{rg}(T) = n^2 - 1$.