Álgebra Lineal

Hoja 6. Transformaciones lineales y matrices

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 6

Transformaciones lineales y matrices

Problema 6.1 Demostrar que las siguientes aplicaciones T son transformaciones lineales encontrando una matriz apropiada A_T asociada a la transformación. Indicar si son inyectivas y encontrar una base y la dimensión del núcleo y de la imagen de T.

a) $\mathsf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $\mathsf{T}((x, y)^t) = x$.

b) $\mathsf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $\mathsf{T}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}^t\, \boldsymbol{v}$, donde $\boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$ es un vector fijo de $\mathbb{R}^2$.

c) $\mathsf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $\mathsf{T}(\boldsymbol{v}) = 3\,\boldsymbol{v}$.

d) $\mathsf{T} : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, definida por $\mathsf{T}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = 3a_2 x^2$.

Problema 6.2 Una transformación lineal $\mathsf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asocia a los vectores $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1)^t$ y $\boldsymbol{v}_2 = (2, -1)^t$ (expresados respecto a la base canónica B_0) los vectores $\boldsymbol{w}_1 = (2, -1)^t$ y $\boldsymbol{w}_2 = (1, -5)^t$, respectivamente. Encontrar una matriz 2×2, A_{T,B_0}, asociada a T respecto a la base canónica B_0. Demostrar que A_T es no-singular (y, por tanto, T es un isomorfismo).

Problema 6.3 Sea la transformación lineal $\mathsf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz asociada respecto a la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Demostrar que T tiene inversa y encontrar la matriz asociada a T^{-1} respecto a la base canónica.

Problema 6.4 Consideremos los vectores

$$\mathbf{b}_1 = (1,0,1)^t \ , \quad \mathbf{b}_2 = (-1,1,2)^t \ , \quad \mathbf{b}_3 = (0,1,5)^t \ , \quad \mathbf{u} = (1,2,3)^t \ .$$

Demostrar que $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Hallar las coordenadas de $\mathbf{u}$ con respecto a B.

Cierta transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verifica que $T(\mathbf{b}_1) = \boldsymbol{e}_1, T(\mathbf{b}_2) = \boldsymbol{e}_2, T(\mathbf{b}_3) = \boldsymbol{e}_3$, siendo $B_0 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base canónica. Escribir la correspondiente matriz A_{T,B_0} y hallar el núcleo y la imagen de T.

Problema 6.5 Sean los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,-1)^t \ , \quad \mathbf{v}_2 = (2,1,2)^t \ , \quad \mathbf{v}_3 = (5,1,-1)^t \ , \quad \mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)^t \ .$$

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que verifica $T(\boldsymbol{e}_1) = \mathbf{v}_1$, $T(\boldsymbol{e}_2) = \mathbf{v}_2$, $T(\boldsymbol{e}_3) = \mathbf{v}_3$, $T(\boldsymbol{e}_4) = \mathbf{u}$. Supongamos que el vector $\mathbf{u}$ es tal que T verifica $rg(T) = nul(T)$. Encontrar la condición que deben cumplir las coordenadas de $\mathbf{u}$ para que esto ocurra. Encontrar una base de $Im(T)$.

Problema 6.6 Encontrar una matriz A tal que $T(\mathbf{u}) = A\,\mathbf{u}$ (respecto a la base canónica), para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T((1,1)^t) = (1,-2)^t$ y $T((2,3)^t) = (-2,5)^t$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por una rotación de 30° en el sentido de las agujas del reloj.

Problema 6.7 Sean la base de $\mathbb{R}^2$, $B = (v_1, v_2)$, donde $v_1 = (1,1)^t$ y $v_2 = (-1,0)^t$, y la transformación lineal dada por $T((x,y)^t) = (4x - 2y, 2x + y)^t$, expresada respecto a la base canónica. Encontrar la matriz de T relativa a la base dada.

Problema 6.8 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Hallar una base para el espacio fila y para el espacio columna de A.

2. Determinar la dimensión del espacio nulo de A y de su traspuesta.

3. ¿Para qué valores de a el vector $\mathbf{b} = (-1, a, a^2)^t$ pertenece al espacio columna de A?

Problema 6.9 Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{aligned} T((1,0,0,0)^t) &= (1,0)^t\,, \\ T((1,1,0,0)^t) &= (-1,0)^t\,, \\ T((0,0,1,0)^t) &= (-2,0)^t\,, \\ T((1,2,3,4)^t) &= (3,0)^t\,. \end{aligned}$$

1. Determinar una matriz A_T que la represente (respecto a la base canónica). Hallar el núcleo y la imagen de T así como sus dimensiones.

2. Hallar los cuatro subespacios fundamentales asociados a la matriz A_T, sus dimensiones y una base para cada uno de ellos.

Problema 6.10 Sea la transformación $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0, a_1 + a_2, 0)^t.$$

Encontrar alguna matriz A_{T,B_2B_1} que represente T de manera que

$$[T(p)]_{B_2} = A_{T,B_2B_1}\,[p]_{B_1},$$

para ciertas bases B_1 y B_2. Determinar los subespacios fundamentales asociados a A_T.

Problema 6.11 Sea la transformación $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}.$$

Encontrar alguna matriz A_{T,B_2B_1} que represente T de manera que

$$[T(M)]_{B_2} = A_{T,B_2B_1}\,[M]_{B_1},$$

con respecto a las bases elegidas B_1 y B_2. Determinar los subespacios fundamentales asociados a A_{T,B_2B_1}.

Hoja 6

Soluciones

Problema 6.1 Un cálculo directo permite concluir que

a) $A_T = (1, 0)$; $B_{\ker(T)} = ((0, 1)^t)$; $B_{\mathrm{Im}(T)} = (1)$; T no es inyectiva.

b) $A_T = (w_1, w_2)$. Como $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$, entonces $w_1 \neq 0$ ó $w_2 \neq 0$:

- Si $w_1 \neq 0$, $B_{\ker(T)} = \left(\left(-\frac{w_2}{w_1}, 1\right)^t\right)$.
- Si $w_1 = 0$, $B_{\ker(T)} = ((1, 0)^t)$.

$B_{\mathrm{Im}(T)} = (1)$; T no es inyectiva.

c) $A_T = 3I_n$; $\ker(T) = \{\boldsymbol{0}\}$ (no hay $B_{\ker(T)}$); $B_{\mathrm{Im}(T)} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$; T es inyectiva.

d) Puesto que

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se tiene que $B_{\ker(T)} = (1, x)$; $B_{\mathrm{Im}(T)} = (x^2)$; por lo que T no es inyectiva.

Problema 6.2 Se cumple que

$$A_{T,B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que $\det(A_{T,B_0}) \neq 0$.

Problema 6.3 La matriz A_T es invertible;

$$A_{T^{-1}} = (A_T)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 6.4 Basta demostrar que es un conjunto linealmente independiente, es decir que

$$\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 = 0$$

define un sistema compatible determinado. Usando las fórmulas de cambio de base $[\mathbf{u}]_B = T_{BB_0}[\mathbf{u}]_{B_0} = (5, 4, -2)^t$.

Por otro lado,

$$A_{T,B_0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

y se tiene que $\ker(T) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

Problema 6.5 La condición es

$$u_1 + u_3 - 4u_2 = 0\,.$$

La imagen de T satisface

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Gen}\left((4, 1, 0)^t, (-1, 0, 1)^t\right).$$

Problema 6.6 Las soluciones son:

a) $A_T = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $A_T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Problema 6.7 La matriz es

$$A_{T,B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 6.8 Se tiene que:

1. $B_{\mathcal{C}(A)} = ((1,2,-4)^t, (2,3,-5)^t)$ y $B_{\mathcal{C}(A^t)} = ((1,2,-1,3)^t, (2,3,0,1)^t)$.

2. $\dim(N(A)) = 2$ y $\dim(N(A^t)) = 1$.

3. $a \in \{-1,-2\}$.

Problema 6.9

1. La matriz es
$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Además, $\ker(T) = \mathrm{Gen}\,((2,1,0,0)^t, (2,0,1,0)^t, (-3,0,0,1)^t)$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Gen}\,((1,0)^t)$.

2. $N(A_T) = \ker(T)$, $\mathcal{C}(A_T) = \mathrm{Im}(T)$, $\mathcal{C}(A_T^t) = \mathrm{Gen}\,((1,-2,-2,3)^t)$ y $N(A_T^t) = \mathrm{Gen}\,((0,1)^t)$.

Problema 6.10 Respecto a la base $B_1 = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{P}_2$ y la canónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene que

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$
\begin{aligned}
N(A_T) &= \mathrm{Gen}\left((0,-1,1)^t\right) , \\
\mathcal{C}(A_T) &= \mathrm{Gen}\left((1,0,0)^t,(0,1,0)^t\right) , \\
\mathcal{C}(A_T^t) &= \mathrm{Gen}\left((1,0,0)^t,(0,1,1)^t\right) , \\
N(A_T^t) &= \mathrm{Gen}\left((0,0,1)^t\right) .
\end{aligned}
$$

Problema 6.11 Respecto a la base

$$
B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)
$$

de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y la canónica de $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$
A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
N(A_T) &= \mathrm{Gen}\left((-1,1,0,0)^t,(0,0,-1,1)^t\right) , \\
\mathcal{C}(A_T^t) &= \mathrm{Gen}\left((1,1,0,0)^t,(0,0,1,1)^t\right) , \\
\mathcal{C}(A_T) &= \mathrm{Gen}\left((1,0)^t,(0,1)^t\right) , \\
N(A_T^t) &= \left\{(0,0)^t\right\} .
\end{aligned}
$$