Álgebra Lineal

Hoja 7. Forma normal de una transformación lineal

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 7

Forma normal de una transformación lineal

Problema 7.1 Sea la base $B = ((1,1,0)^t, (1,3,1)^t, (2,1,0)^t)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Encontrar las matrices de cambio de base para pasar de B_0 a B y de B a B_0.
2. Encontrar las coordenadas del vector $\boldsymbol{v} = (3,-2,1)^t$ con respecto a B.
3. Encontrar las coordenadas del vector $\boldsymbol{w}$ con respecto a la base canónica B_0 si se sabe que sus coordenadas respecto a la base B son $[\boldsymbol{w}]_B = (-12,1,7)^t$.

Problema 7.2 Sea el espacio $\mathbb{P}_3$ con bases

$$\begin{aligned} B_0 &= (1, x, x^2, x^3)\,, \\ B_1 &= (1-x, x-x^2, x^2-x^3, 1-2x^3)\,, \\ B_2 &= (1, 1-x, 1-x-x^2, 1-x-x^2-x^3)\,. \end{aligned}$$

1. Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B_0 a B_1.
2. Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B_0 a B_2.

3. Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B_1 a B_2.

4. Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 3x$. Hallar sus coordenadas con respecto a B_0, B_1 y B_2.

Problema 7.3 Sea

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz que representa cierta transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con respecto a la base canónica.

1. Hallar la matriz que representa T con respecto a la base $B = ((2, -3)^t, (1, 2)^t)$.

2. Hallar la representación canónica de la transformación y las bases con respecto a las cuales se ha calculado.

Problema 7.4 Sea la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_1 + a_2, a_1 - a_2, a_0 + a_2)^t .$$

1. Hallar la representación de T respecto a las bases $B = (1, x, x^2)$ y B_0 (canónica) de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente.

2. Hallar la forma canónica de T y las bases respecto a las cuales se representa.

Problema 7.5 Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+d \\ b+c \\ a+d \end{pmatrix} .$$

1. Hallar la matriz que representa a T respecto a las bases

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y la canónica B_0 de $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

2. Hallar la forma canónica de T y las bases respecto a las cuales se representa.

Hoja 7

Soluciones

Problema 7.1

1. Las matrices de cambio de base son

$$T_{B_0B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_{BB_0} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. $[\boldsymbol{v}]_B = (-12, 1, 7)^t$.

3. $\boldsymbol{w} = (3, -2, 1)^t$.

Problema 7.2

1. La matriz $T_{B_1B_0}$ es

$$T_{B_1B_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. La matriz $T_{B_2B_0}$ es
$$T_{B_2B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. La matriz $T_{B_2B_1}$ es
$$T_{B_2B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. $[p]_{B_0} = (0, -3, 0, 1)^t, \quad [p]_{B_1} = (-2, -5, -5, 2)^t, \quad [p]_{B_2} = (-3, 3, 1, -1)^t.$

Problema 7.3

1. La matriz $A_{T,B}$ es
$$A_{T,B} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ -31 & 23 \end{pmatrix}.$$

2. $A_{T,B_2B_1} = I_2, \quad B_1 = B_0, \quad B_2 = ((1, -1)^t, (3, 1)^t).$

Problema 7.4

1. La matriz A_{T,B_0B} es
$$A_{T,B_0B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $B_1 = B, \quad B_2 = \left((1,0,0,1)^t, (0,1,1,0)^t, (0,1,-1,0)^t, (0,0,0,1)^t\right)$ y

$$A_{T,B_2B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 7.5

1. La matriz A_{T,B_0B} es

$$A_{T,B_0B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Las bases que dan lugar a la forma canónica de T son

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right), \\ B_2 &= \left((1,0,1)^t, (0,1,0)^t, (1,0,0)^t\right), \\ A_{T,B_1B_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$