Álgebra Lineal

Hoja 8. Valores y vectores propios

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 8

Valores y vectores propios

Problema 8.1 Consideremos la transformación lineal $T^{X,\theta}$ que consiste en rotar $\mathbb{R}^3$ en sentido antihorario, con respecto al eje X, un ángulo θ.

a) Hallar los valores propios de la matriz asociada.

b) Hallar los correspondientes valores propios para $\theta = \pi$. ¿Cuáles son las multiplicidades algebraicas y geométricas en este caso?

c) Hallar una base de $\mathbb{R}^3$ en la que se encuentren tantos vectores propios de $T^{X,\pi}$ como sea posible.

Problema 8.2 Elegir la última fila de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

para que A tenga valores propios 1, 2 y 3.

Problema 8.3 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

donde $a + b = c + d$. Demostrar que $(1,1)^t$ es un vector propio y hallar ambos valores propios.

Problema 8.4 Dada una matriz A de dimensión $n \times n$, con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, no necesariamente diferentes, probar que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Problema 8.5 Consideremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Hallar los valores propios de A y de A^2 y sus multiplicidades algebraicas.
2. Usar los valores propios del apartado (a) para calcular los determinantes de A y A^2.

Problema 8.6 Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables, encontrar tantos vectores propios linealmente independientes como sea posible y calcular su determinante.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Problema 8.7 Calcular los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 8.8 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea el polinomio $p(x) = x^3 - 6x^2 + x - 3$. Utilizar el teorema de Caley-Hamilton para hallar A^2 y para evaluar p en A.

Problema 8.9 Sea la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ dada por

$$T(p) = x\,p'(x)\,.$$

Calcular los valores propios de T y una colección de tantos vectores propios linealmente independientes como sea posible.

Problema 8.10 Sea la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ dada por

$$T(p) = p(x) + p'(x)\,.$$

Calcular los valores propios de T y decidir si T es diagonalizable.

Problema 8.11 Sea la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ dada por

$$T(p) = p(2x+1)\,.$$

Encontrar una base con respecto a la cual la representación de T es diagonal.

Problema 8.12 Decidir si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. En tal caso, encontrar P (invertible) y D (diagonal) tales que $A = P\,D\,P^{-1}$.

Hoja 8

Soluciones

Problema 8.1

a) $\sigma(A_{T^{x,\theta}}) = \{1, \cos(\theta) + i\ \mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta) - i\ \mathrm{sen}(\theta)\}$.

b) $\sigma(A_{T^{x,\theta}}) = \{1, -1\}, \quad m_a(1) = m_g(1) = 1, \quad m_a(-1) = m_g(-1) = 2.$

c) $B = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

Problema 8.2 $a = 6, \quad b = -11$ y $\quad c = 6$.

Problema 8.3 $\sigma(A) = \{a + b, d - b\}$.

Problema 8.4 *Indicación:* Evaluar el polinomio característico en $\lambda = 0$.

Problema 8.5

1. $\sigma(A) = \{1, -1, i, -i\}, \quad m_a(\lambda_i) = 1, \quad \sigma(A^2) = \{1, -1\}, \quad m_a(\lambda_i) = 2.$

2. $\det(A) = -1, \quad \det(A^2) = 1.$

Problema 8.6

a) Diagonalizable. Vectores propios: $(0,1,0)^t, (-5,-9,-25)^t, (11,-3,11)^t$ y $\quad \mathrm{det}(A_1) = 30$.

b) Diagonalizable. Vectores propios: $(-1,1,0)^t, (-1,0,1)^t, (1,1,1)^t$ y $\quad \mathrm{det}(A_2) = 2$.

c) No diagonalizable. Vectores propios: $(1,0,1)^t, (8,0,1)^t$ y $\quad \mathrm{det}(A_3) = 20$.

d) No diagonalizable. Vectores propios: $(1,0,1)^t, (0,1,0)^t$ y $\quad \mathrm{det}(A_4) = 27$.

Problema 8.7 $\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 3i$ y $\quad \sigma_3 = -3i$. Los vectores propios correspondientes son: $\boldsymbol{v}_1 = (2,-1,2)^t, \quad \boldsymbol{v}_2 = (1+3\,i, 4, 1-3\,i)^t$ y $\boldsymbol{v}_3 = (1-3\,i, 4, 1+3\,i)^t$.

Problema 8.8 Los resultados son

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, \qquad p(A) = \begin{pmatrix} -29 & 12 \\ -24 & -5 \end{pmatrix}.$$

Problema 8.9 $\lambda_1 = 0$ y $\quad p_1(x) = 1. \quad \lambda_2 = 1$ y $\quad p_2(x) = x. \quad \lambda_3 = 2$ y $\quad p_3(x) = x^2$.

Problema 8.10 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1. \quad$ No es diagonalizable.

Problema 8.11 $B = \left(1, 1+x, 1+2x+x^2\right)$.

Problema 8.12

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$