# Álgebra Lineal

## Hoja 9. Producto interno y ortogonalidad en espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

Universidad Carlos III de Madrid

# Hoja 9

# Producto interno y ortogonalidad en espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$

**Problema 9.1** Dados los vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^t, \mathbf{v} = (v_1, v_2)^t \in \mathbb{R}^2$ decidir si las siguientes operaciones definen productos internos:

a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -2u_1v_1 + 3u_2v_2$.

b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$.

c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2$.

Para cada una de las operaciones que sí lo sean:

1. Calcular la longitud de los vectores $(1, 0)^t$ y $(2, -1)^t$.

2. Hallar su producto interno.

3. Determinar el ángulo entre ellos.

**Problema 9.2** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular su inversa, si existe. ¿Es $A$ es ortogonal? ***Basar la respuesta en el cálculo de la inversa.***

2. Hallar una base para el espacio fila y una base para el espacio columna de $A$.

3. Hallar el espacio nulo de $A$ y su dimensión.

4. Comprobar que los vectores de la base del espacio nulo son ortogonales a los vectores de la base del espacio fila $A$.

5. Determinar el espacio nulo de la traspuesta de $A$ y calcular su dimensión.

6. Comprobar que los vectores de la base del espacio nulo de la traspuesta de $A$ son ortogonales a los vectores de la base del espacio columna de $A$.

7. Sin resolver sus ecuaciones, determinar si los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ son compatibles, siendo $\mathbf{b}_1 = (1, -1, 2)^t$ y $\mathbf{b}_2 = (2, 1, 3)^t$.

**Problema 9.3** Sea $A$ una matriz $3 \times 4$ cuyo espacio nulo es

$$N(A) = \left\{ x = \alpha\,(1, 2, 3, 4)^t : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Determinar el rango de $A$.

2. Consideremos el espacio fila de $A$. Probar que el vector $\mathbf{v}_1 = (4, 0, 0, -1)^t$ pertenece a $\mathcal{C}(A^t)$.

3. Extender $(\mathbf{v}_1)$ a una base de $\mathcal{C}(A^t)$.

4. Hallar una base del espacio nulo de la traspuesta.

**Problema 9.4** Sea la operación definida en el espacio vectorial de las matrices de dimensión $2 \times 2$ con componentes reales, $\mathbb{R}^{2\times 2}$, mediante:

$$\langle A, B\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}\,.$$

1. Probar que esta operación es un producto interno en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

2. Probar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

   son ortogonales entre sí.

3. Hallar la proyección ortogonal de las matrices $B$ y

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   sobre la matriz $A$.

**Problema 9.5** Sea $W$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $W^\perp$ su complemento ortogonal. Demostrar que $W^\perp$ también es un subespacio.

**Problema 9.6** Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_n$, con la operación

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt\,.$$

1. Probar que esta operación es un producto interno.

2. Probar que el subconjunto $S_1 \subset \mathbb{P}_n$ formado por los polinomios que sólo contienen términos de grado par es un subespacio de $\mathbb{P}_n$.

NOTA: asumir que el polinomio idénticamente nulo $p(x) = 0$ es un polinomio de grado cero.

3. Consideremos el subconjunto $S_2 \subset \mathbb{P}_n$ formado por los polinomios de $\mathbb{P}_n$ que sólo contienen términos de grado impar. Probar que los vectores de $S_1$ son ortogonales a todos los vectores de $S_2$. ¿Son $S_1$ y $S_2$ complementos ortogonales?

# Hoja 9

# Soluciones

**Problema 9.1** Solo es producto interno la operación definida en (b). En el caso (a), no se cumple la propiedad de no negatividad; en el caso (c) no se cumple la propiedad conmutativa.

Para el caso (b) se tiene: $\|(1,0)^t\| = \sqrt{2}$, $\|(2,-1)^t\| = \sqrt{11}$, $\langle (1,0)^t, (2,-1)^t \rangle = 4$, $\cos(\alpha) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

**Problema 9.2** Calculamos primero una forma escalonada de $A$, por ejemplo:

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato entonces responder a las cuestiones:

1. No existe inversa. $A$ no puede ser ortogonal porque, si lo fuera, al ser cuadrada, su traspuesta sería su inversa y ésta no existe.

2. $B_{\mathcal{C}(A)} = ((1,1,0)^t, (0,1,-1)^t)$; $\qquad B_{\mathcal{C}(A^t)} = ((1,0,1)^t, (1,1,2)^t)$.

3. $N(A) = \mathrm{Gen}\,((-1,-1,1)^t)$; $\qquad \dim(N(A)) = 1$.

4. $\langle (1,0,1)^t, (-1,-1,1)^t \rangle = 0$ y $\quad \langle (1,1,2)^t, (-1,-1,1)^t \rangle = 0$.

5. Calculamos la forma escalonada de $(A|I)$ y obtenemos $N(A^t) = \mathcal{G}en\left((-1,1,1)^t\right)$ y $\dim(N(A^t)) = 1$.

6. $\langle (1,1,0)^t, (-1,1,1)^t \rangle = 0$ y $\quad \langle (0,1,-1)^t, (-1,1,1)^t \rangle = 0$.

7. Como $\mathbf{b}_1 \in \mathcal{C}(A)$, se trata de un sistema compatible. Como $\mathbf{b}_2 \notin \mathcal{C}(A)$, es un sistema incompatible.

**Problema 9.3** Tenemos que:

1) La dimensión de $N(A)$ es 1, por tanto $rg(A) = 3$.

2) Basta con ver que $\boldsymbol{v}_1$ es ortogonal a todos los vectores de $N(A)$, es decir:

$$\left\langle (1,2,3,4)^t, \boldsymbol{v}_1 \right\rangle = 0\,.$$

3) Podemos escoger $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ con $\boldsymbol{v}_2 = (2,-1,0,0)^t$ y $\boldsymbol{v}_3 = (3,0,-1,0)^t$, por ejemplo.

4) El $N(A^t)$ sólo consta del vector $\mathbf{0}$.

**Problema 9.4** Para la definición dada:

1) Es inmediato comprobar que se verifican las cuatro propiedades que definen el producto interno.

2) $\langle A, B \rangle = 0 + 6 + 6 - 12 = 0$.

3) $P_A(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_A(C) = \dfrac{1}{15} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

**Problema 9.5** Basta con probar las propiedades de clausura para la suma y el producto por escalares de los elementos de $W^{\perp}$: si $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W^{\perp}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W^{\perp}$ y $\alpha\,\boldsymbol{w}_1 \in W^{\perp}$.

**Problema 9.6** Para la operación dada:

1. Comprobamos las cuatro propiedades que definen un producto interno:

   i) $\langle p, q\rangle = \langle q, p\rangle$ por ser conmutativo el producto de polinomios.

   ii) $\alpha\langle p, q\rangle = \alpha \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \alpha\, p(t)\, q(t)\, dt = \langle \alpha\, p, q\rangle.$

   iii) $\langle p, q + r\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, [q + r](t)\, dt = \int_{-1}^{1} p(t)\, [q(r) + r(t)]\, dt = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt + \int_{-1}^{1} p(t)\, r(t)\, dt = \langle p, q\rangle + \langle p, r\rangle.$

   iv) $\langle p, p\rangle = \int_{-1}^{1} p^2(t)\, dt \geqslant 0$ por ser el integrando una función no negativa. Además, el valor de la integral solo puede ser cero en el caso de que $p$ sea el polinomio idénticamente nulo.

2. Es evidente que la suma de dos polinomios de $S_1$, que sólo constan de términos con potencias pares de $x$, es otro polinomio de potencias pares y que si multiplicamos uno de tales polinomios por un número real (incluido el 0), el resultado también tendrá sólo potencias pares. Por tanto $S_1$ es un subespacio vectorial.

3. Sean $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$; su producto es un polinomio de grado impar, que sólo contiene potencias impares de $x$, es decir, es una función impar. Al integrar dicho polinomio en el intervalo simétrico respecto del origen $[-1, 1]$, el resultado es 0. Por tanto, los vectores de $S_1$ y $S_2$ son ortogonales. Sin embargo, $S_2$ no es un subespacio vectorial pues no contiene el vector cero $p(x) = 0$ y no es, por tanto, el complemento ortogonal de $S_1$.