Álgebra Lineal

Hoja 11. El teorema espectral en $\mathbb{R}$

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 11

El teorema espectral en $\mathbb{R}$

Problema 11.1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Justificar que A es ortogonalmente diagonalizable.
2. Calcular los valores propios de A y sus multiplicidades algebraicas.
3. Hallar los correspondientes espacios propios. Determinar la multiplicidad geométrica de estos valores propios.
4. Hallar la descomposición espectral de A, es decir, escribir $A = \sum_{i=1}^{3} A_i$, con $A_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^t$, siendo λ_i los valores propios de A y $\boldsymbol{v}_i$ los vectores propios apropiados.
5. Hallar una matriz diagonal D semejante a A y una matriz P tales que $A = P\,D\,P^t$.

Problema 11.2 Hallar una diagonalización ortogonal de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 11.3 Calcular la descomposición espectral de la matriz del Problema 11.2.

Problema 11.4 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular los valores propios de A y sus multiplicidades algebraicas.
2. Hallar los correspondientes espacios propios. Determinar la multiplicidad geométrica de estos valores propios.
3. Verificar que los vectores propios asociados a los valores propios forman una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
4. Hallar la descomposición espectral de A.
5. Hallar una matriz diagonal D semejante a A y una matriz P tales que $A = P\,D\,P^{-1}$.
6. Hallar una matriz diagonal D_0 semejante a A^{10} y una matriz P_0 tales que $A^{10} = P_0\,D_0\,P_0^{-1}$, determinar los valores propios de A^{10} y hallar A^{10}.

Hoja 11

Soluciones

Problema 11.1 Es fácil ver que

1. A es simétrica y de entradas reales.

2. $\sigma(A) = \{0, 1, -1\}, \quad m_a(\lambda_i) = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

3. $N(A) = \mathrm{Gen}\,((0,1,0)^t); \quad N(A-I) = \mathrm{Gen}\,((1,0,1)^t); \quad N(A+I) = \mathrm{Gen}\,((1,0,-1)^t);$
   $m_g(\lambda_i) = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

4. Las matrices son:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3\times 3}\,, \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \\
A_3 &= (-1)\,\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

5. Por ejemplo:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 11.2 Podemos escribir las matrices como:

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 11.3 Se tiene:

$$\begin{aligned} A &= -3\,\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3\,\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad -3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\,\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Problema 11.4 Se tienen los siguientes resultados:

1. $\sigma(A) = \{0, 1, 3\}$, $\quad m_a(\lambda_i) = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

2. $N(A) = \mathrm{Gen}\,((1,1,1)^t) = \mathrm{Gen}\,(\boldsymbol{w}_1)$;

   $N(A - I) = \mathrm{Gen}\,((1,0,-1)^t) = \mathrm{Gen}\,(\boldsymbol{w}_2)$;

   $N(A - 3I) = \mathrm{Gen}\,((1,-2,1)^t) = \mathrm{Gen}\,(\boldsymbol{w}_3)$;

   $m_g(\lambda_i) = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

3. Es trivial ver que $\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle = 0$.

4. $A = A_1 + A_2 + A_3$ con

$$\begin{aligned} A_1 &= 0\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_{3\times 3}\,, \\ A_2 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_3 &= 3\,\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Las matrices buscadas son:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

aunque en este caso no es necesario que P sea ortogonal.

6. Las matrices buscadas son:

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix}, \qquad P_0 = P\,.$$