Álgebra Lineal

Hoja 12. Geometría de las transformaciones lineales en $\mathbb{R}$

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 12

Geometría de las transformaciones lineales en $\mathbb{R}$

Problema 12.1 Para cada una de las transformaciones definidas en $\mathbb{R}^2$ dadas:

a) Reflexión respecto a la recta $y = 2x$.

b) Proyección ortogonal sobre la recta $2y = x$.

c) Permutación de coordenadas (es decir, la imagen de $(x, y)^t$ viene dada por $(y, x)^t$).

d) Dilatación por un factor $c = 3$, seguida de una permutación de coordenadas.

e) Proyección ortogonal sobre el eje X, seguida de una reflexión respecto a la recta $y = 2x$.

realizar lo siguiente:

1. Encontrar la matriz asociada a la transformación lineal.
2. Decidir si es o no una transformación ortogonal.
3. Obtener la forma escalonada reducida de la matriz.

4. Hallar los cuatro espacios fundamentales asociados a la matriz.

5. Hallar su transformación adjunta.

Problema 12.2 Para cada una de las transformaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definidas a continuación:

a) Reflexión respecto al plano XZ.

b) Reflexión respecto al plano XY.

c) Proyección sobre el eje X.

d) Proyección sobre el plano XY.

e) Rotación en sentido antihorario respecto al eje Y un ángulo $\theta = \pi/2$.

f) Rotación en sentido horario respecto al eje Y un ángulo $\theta = \pi/4$.

g) Proyección sobre el eje Y, seguida de una dilatación por un factor $c = 4$.

h) Rotación en sentido antihorario respecto al eje X un ángulo $\theta = \pi/3$, seguida de una proyección sobre el plano $y = x$.

realizar lo siguiente:

1. Determinar la imagen del punto $\boldsymbol{v} = (5, -2, 1)^t$.

2. Decidir si es o no una transformación ortogonal.

3. Determinar el conjunto de puntos fijos.

Problema 12.3 Para cada una de las transformaciones T definidas en $\mathbb{R}^3$ dadas:

a) Permutación de la primera y tercera coordenadas.

b) Proyección ortogonal sobre el plano XY, seguido de una permutación de la primera y segunda coordenadas.

c) Permutación de la primera y segunda coordenadas, seguida de una reflexión respecto al plano XY, seguida de una permutación de la segunda y tercera coordenadas.

realizar lo siguiente:

1. Encontrar la matriz A_T asociada a la transformación lineal.
2. Decidir si T es o no una transformación ortogonal.
3. Obtener la forma escalonada reducida de la matriz A_T.
4. Hallar los cuatro espacios fundamentales asociados a la matriz A_T.
5. Hallar la transformación adjunta de T.

Hoja 12

Soluciones

Problema 12.1 Para cada una de las transformaciones dadas se tiene:

a) La matriz y su forma escalonada son:

$$A_T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es una transformación ortogonal. Los subespacios buscados son: $N(A_T) = N(A_T^t) = \{0\}$, $\quad \mathcal{C}(A_T) = \mathcal{C}(A_T^t) = \mathbb{R}^2$.

b) La matriz y su forma escalonada son:

$$A_T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No es una transformación ortogonal. Los subespacios buscados son: $N(A_T) = N(A_T^t) = \mathrm{Gen}\,((1,-2)^t)$, $\quad \mathcal{C}(A_T) = \mathcal{C}(A_T^t) = \mathrm{Gen}\,((2,1)^t)$.

c) La matriz y su forma escalonada son:

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es una transformación ortogonal. Los subespacios buscados son: $\mathsf{N}(A_\mathsf{T}) = \mathsf{N}(A_\mathsf{T}^t) = \{\mathbf{0}\}, \quad \mathcal{C}(A_\mathsf{T}) = \mathcal{C}(A_\mathsf{T}^t) = \mathbb{R}^2$.

d) La matriz y su forma escalonada son:

$$A_\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No es una transformación ortogonal. Los subespacios buscados son: $\mathsf{N}(A_\mathsf{T}) = \mathsf{N}(A_\mathsf{T}^t) = \{\mathbf{0}\}, \quad \mathcal{C}(A_\mathsf{T}) = \mathcal{C}(A_\mathsf{T}^t) = \mathbb{R}^2$.

e) La matriz y su forma escalonada son:

$$A_\mathsf{T} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No es una transformación ortogonal. Los subespacios buscados son: $\mathsf{N}(A_\mathsf{T}) = \mathsf{Gen}(\boldsymbol{e}_2)$, $\mathcal{C}(A_\mathsf{T}^t) = \mathsf{Gen}(\boldsymbol{e}_1), \quad \mathsf{N}(A_\mathsf{T}^t) = \mathsf{Gen}\left((4,3)^t\right), \quad \mathcal{C}(A_\mathsf{T}) = \mathsf{Gen}\left((-3,4)^t\right)$.

En todos los casos, la transformación adjunta T^* tiene la matriz asociada $A_{\mathsf{T}^*} = A_\mathsf{T}^t$.

Problema 12.2 Se tiene:

a) La matriz asociada a la transformación es

$$A_\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathsf{T}(\boldsymbol{v}) = (5,2,1)^t$. T es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $\mathsf{F} = \mathsf{Gen}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)$.

b) La matriz asociada a la transformación es

$$A_\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(\boldsymbol{v}) = (5, -2, -1)^t$. T es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $F = \mathrm{Gen}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

c) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(\boldsymbol{v}) = (5, 0, 0)^t$. T no es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $F = \mathrm{Gen}(\boldsymbol{e}_1)$.

d) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(\boldsymbol{v}) = (5, 2, 0)^t$. T no es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $F = \mathrm{Gen}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

e) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(\boldsymbol{v}) = (1, -2, 5)^t$. T es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $F = \mathrm{Gen}(\boldsymbol{e}_2)$.

f) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathsf{T}(\boldsymbol{v}) = (2\sqrt{2}, -2, 3\sqrt{2})^t$. T es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $\mathsf{F} = \mathrm{Gen}(\boldsymbol{e}_2)$.

g) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathsf{T}(\boldsymbol{v}) = (0, -8, 0)^t$. T no es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $\mathsf{F} = \{\mathbf{0}\}$.

h) La matriz asociada a la transformación es

$$A_T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathsf{T}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{1}{4}\left(8 - \sqrt{3}, 8 - \sqrt{3}, 2 - 4\sqrt{3}\right)^t$. T no es una transformación ortogonal y el conjunto de puntos fijos es $\mathsf{F} = \{\mathbf{0}\}$.

Problema 12.3 Se tiene que

a) La matriz asociada a la transformación y su forma escalonada son

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

T sí es ortogonal. Los subespacios buscados son: $\mathsf{N}(A_T) = \mathsf{N}(A_T^t) = \{\mathbf{0}\}$; $\mathcal{C}(A_T) = \mathcal{C}(A_T^t) = \mathbb{R}^3$.

b) La matriz asociada a la transformación y su forma escalonada son

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

T no es ortogonal. Los subespacios buscados son: $N(A_T) = N(A_T^t) = \mathrm{Gen}\,(\boldsymbol{e}_3)$, $\mathcal{C}(A_T) = \mathcal{C}(A_T^t) = \mathrm{Gen}\,(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

c) La matriz asociada a la transformación y su forma escalonada son

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

T sí es ortogonal. Los subespacios buscados son: $N(A_T) = N(A_T^t) = \{\mathbf{0}\}$; $\quad \mathcal{C}(A_T) = \mathcal{C}(A_T^t) = \mathbb{R}^3$.

En todos los casos, la transformación adjunta T^* tiene la matriz asociada $A_{T^*} = A_T^t$.