Álgebra Lineal

Hoja 13. Mínimos cuadrados

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 13

Mínimos cuadrados

Problema 13.1 Determinar si los siguientes sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ son compatibles o no y encontrar su solución de mínimos cuadrados:

a) $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3\,, \\ -2x_1 + 3x_2 = 1\,, \\ 2x_1 - x_2 = 2\,. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 = 0\,, \\ x_1 - x_2 = 0\,, \\ 2x_1 - x_2 = 2\,. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3\,, \\ x_1 - x_2 = 0\,, \\ -2x_1 + 4x_2 = 2\,. \end{cases}$$

Problema 13.2 Para cada solución de mínimos cuadrados del Problema 13.1:

1) Determinar la proyección del vector $\mathbf{b}$ en el espacio columna de la matriz A.

2) Calcular la diferencia $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\,\mathbf{x}_0$ (conocida como *vector de residuos*).

3) Verificar que el vector de residuos $\mathbf{r}$ pertenece al espacio nulo de la traspuesta de A.

Problema 13.3 Sean los puntos experimentales $(x, y) = (2, 1)$, $(5, 2)$, $(7, 3)$ y $(8, 3)$.

1. Hallar la ecuación $y = a + bx$ que mejor los ajusta, utilizando mínimos cuadrados, y esbozar su gráfico.

2. Encontrar el ajuste de mínimos cuadrados cuadrático (de la forma $y = a + bx + cx^2$) y esbozar su gráfico.

Problema 13.4 Sea A una matriz y sea $\mathbf{b}$ un vector no nulo del espacio nulo de la traspuesta de A.

1. Demostrar que el espacio nulo de A coincide con el espacio nulo de $A^t\,A$.

2. Demostrar que el sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es incompatible.

Problema 13.5 Demostrar que, si se verifica la expresión matricial

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline 0 & A^t \end{array}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

donde las matrices están escritas *por bloques*, entonces $\mathbf{x}_0$ es la solución de mínimos cuadrados del sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{r}$ es el vector de residuos.

Problema 13.6 Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{C}[0, 1]$ de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

y sea S el subespacio generado por los vectores 1 y $2x - 1$.

1. Demostrar que 1 y $2x - 1$ son ortogonales.

2. Determinar $\|1\|$ y $\|2x - 1\|$.

3. Encontrar la aproximación de mínimos cuadrados de $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 1]$ utilizando una función de S.

Problema 13.7 Dado el espacio vectorial $\mathcal{C}[-1, 1]$ de las funciones continuas en el intervalo $[-1, 1]$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx\,.$$

1. Demostrar que los vectores 1 y x son ortogonales.

2. Calcular $\|1\|$ y $\|x\|$.

3. Encontrar la aproximación de mínimos cuadrados de $f(x) = x^{1/3}$ en $[-1, 1]$ utilizando una función de la forma $l(x) = c_1 + c_2\, x$.

Hoja 13

Soluciones

Problema 13.1

a) Es incompatible y $\mathbf{x}_0 = \dfrac{1}{50}\,(83, 71)^t$.

b) Es incompatible y $\mathbf{x}_0 = \dfrac{1}{27}\,(36, 22)^t$.

c) Es compatible con $x_1 = x_2 = 1$ y $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^t$.

Problema 13.2

1) Las proyecciones son

   a) $\dfrac{1}{50}\,(154, 47, 95)^t$.

   b) $\dfrac{1}{27}\,(2, 14, 50)^t$.

   c) $(3, 0, 2)^t$.

2) Las diferencias $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\,\mathbf{x}_0$ son

   a) $\mathbf{r} = \dfrac{1}{50}\,(-4, 3, 5)^t$.

   b) $\mathbf{r} = \dfrac{1}{27}\,(-2, -14, 4)^t$.

c) $\mathbf{r} = (0,0,0)^t$.

3) Claramente se cumple que $\mathbf{r} \in N(A)$:

a) $N(A) = \mathrm{Gen}\left((-4,3,5)^t\right)$.

b) $N(A) = \mathrm{Gen}\left((1,7,-2)^t\right)$.

c) $N(A) = \mathrm{Gen}\left((-2,8,3)^t\right)$.

Problema 13.3

1. $y = \dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{14}\,x$.
2. $y = \dfrac{19}{132} + \dfrac{19}{44}\,x - \dfrac{1}{132}\,x^2$.

Problema 13.4

1. Si $\mathbf{x} \in N(A)$, entonces $A^t A\,\mathbf{x} = A^t\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Luego $\mathbf{x} \in N(A^t A)$ y $N(A) \subset N(A^t A)$.

   Al contrario, si $\mathbf{x} \in N(A^t A)$, entonces $A^t A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si hacemos el producto escalar de esta expresión por $\mathbf{x}$, tenemos que $\langle \mathbf{x}, A^t A\,\mathbf{x}\rangle = 0$. Pero esto es equivalente a $\|A\,\mathbf{x}\| = 0$, luego $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in N(A)$ y $N(A^t A) \subset N(A)$.

   Las dos inclusiones implican que $N(A) = N(A^t A)$.

2. Si multiplicamos por A^t a la izquierda, $A^t A\,\mathbf{x} = A^t\,\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Luego $\mathbf{x} \in N(A^t A) = N(A)$ y por tanto el sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ debe ser incompatible si $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Problema 13.5 El sistema se lee

$$A\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{r} = \mathbf{b}\,, \quad A^t\,\mathbf{r} = \mathbf{0}\,.$$

De aquí se deduce que, si $A^t A$ es invertible, la solución de mínimos cuadrados buscada es:

$$\mathbf{x}_0 = (A^t A)^{-1} A^t\,\mathbf{b}\,.$$

Problema 13.6 Si $f_1 = 1$ y $f_2 = 2x - 1$, entonces

1. $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$.

2. $\|f_1\| = 1$ y $\|f_2\| = 1/\sqrt{3}$.

3. $\sqrt{x} \approx \dfrac{4}{15} + \dfrac{4}{5} x$ en $[0, 1]$.

Problema 13.7 Si $f_1 = 1$ y $f_2 = x$, entonces

1. $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$.

2. $\|f_1\| = \sqrt{2}$ y $\|f_2\| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

3. $x^{1/3} \approx \dfrac{9}{7} x$ en $[-1, 1]$.