Álgebra Lineal

Hoja 14. Pseudoinversa y descomposición en valores singulares

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 14

Pseudoinversa y descomposición en valores singulares

Problema 14.1 Calcular los valores singulares de las siguientes matrices. Hallar su SVD. Calcular su pseudoinversa basando los cálculos en la SVD. Si son de rango completo, calcular la inversa de una forma alternativa.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

e) $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

f) $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 14.2 Si A es una matriz cuadrada, demostrar que $|\det(A)|$ es el producto de los valores singulares de A.

Problema 14.3 ¿Cuáles son los valores singulares de la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

para $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

Problema 14.4 Usar la pseudoinversa para encontrar alguna solución de mínimos cuadrados de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0\,, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6\,. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3\,, \\ 2x_1 - x_2 = 2\,, \\ x_1 + x_2 = 1\,. \end{cases}$

Problema 14.5 Encontrar la factorización QR de las matrices del Problema 14.1 que tengan columnas linealmente independientes y calcular la proyección ortogonal del vector canónico $\boldsymbol{e}_1$ apropiado sobre el espacio columna de la matriz utilizando la descomposición QR y la SVD.

Hoja 14

Soluciones

Problema 14.1

a) La descomposición SVD de A_1 y su pseudo-inversa A_1^+ son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
A_1^+ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

b) La descomposición SVD de A_2 y su pseudo-inversa A_2^+ son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \\
A_2^+ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

c) La descomposición SVD de A_3 y su pseudo-inversa A_3^+ son las siguientes:

$$A_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_3^+ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) La descomposición SVD de A_4 y su pseudo-inversa A_4^+ son las siguientes:

$$A_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4^+ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) La descomposición SVD de A_5 y su pseudo-inversa A_5^+ son las siguientes:

$$A_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) La descomposición SVD de A_6 y su pseudo-inversa A_6^+ son las siguientes:

$$A_6 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_6^+ = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 14.2 Si escribimos la descomposición SVD de A, de dimensión $n \times n$, de la forma:

$$A = U\,S\,V^t\,,$$

donde U y V tienen determinante ± 1 por ser ortogonales y S es $n \times n$ y tiene en la diagonal principal los valores singulares de A, es evidente que

$$\det(A) = \pm\det(S) = \pm\prod_{i=1}^{n} \sigma_i\,,$$

Problema 14.3 Son $\sigma_1 = \sqrt{1+\text{sen}(2\alpha)}$ y $\quad \sigma_2 = \sqrt{1-\text{sen}(2\alpha)}$.

Problema 14.4 Se tienen las soluciones:

a) $\boldsymbol{x}_0 = (1,1,1)^t$ (solución de norma mínima).

b) $\boldsymbol{x}_0 = \dfrac{1}{35}\,(43,22)^t$ (solución única).

Problema 14.5 Las matrices tienen columnas linealmente independientes en los siguientes apartados:

a) La descomposición $A = Q\,R$ y $P_{\mathcal{C}(A)}(\boldsymbol{e}_1)$ son:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}(A)}(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{2}\,(1,1,0)^t\,.$$

c) $Q = I_2;\quad R = A;\quad P_{\mathcal{C}(A)}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1$.

e) La descomposición $A = Q\,R$ y $P_{\mathcal{C}(A)}(\boldsymbol{e}_1)$ son:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}(A)}(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{2}\,(1,0,1)^t\,.$$