Álgebra Lineal

Ejercicios de evaluación

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Problema 1 Explicar razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si A es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{b}$ es un vector de $\mathbb{R}^m$, entonces el conjunto de soluciones del sistema lineal $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

   Solución:

   FALSO. Si $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, el vector $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no es solución del sistema; por tanto el conjunto de soluciones no es un espacio vectorial.

2. El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas $(x, y, z)^t$ satisfacen la ecuación del plano $2x - 3y + z = 1$ es un subespacio vectorial de dimensión 2.

   Solución:

   FALSO. El conjunto de vectores dado no contiene al vector $\mathbf{0}$, por tanto no es espacio vectorial.

3. Dado el espacio columna de la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m > n$, no es posible encontrar un conjunto de cardinalidad m que lo genere.

   Solución:

   FALSO. Podemos formar un conjunto generador con las n columnas de A y $m - n$ vectores adicionales cualesquiera (aunque obviamente no serán linealmente independientes).

4. Si $V = \mathrm{Gen}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, entonces $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ es una base de V.

   Solución:

   FALSO. Los vectores de la base tienen que ser linealmente independientes.

5. Las columnas de A, una matriz invertible de dimensión $n \times n$, forman una base de $\mathbb{R}^n$.

Solución:

VERDADERO. Si A es invertible tiene rango n y, por tanto, sus n columnas son linealmente independientes.

6. Si V es un subespacio de $\mathbb{R}^5$ y $V \neq \mathbb{R}^5$, entonces cualquier conjunto de 4 vectores de V es linealmente dependiente.

   Solución:

   FALSO. El subespacio puede tener dimensión 4 y, en este caso, contendrá 4 vectores linealmente independientes.

7. Si A es una matriz 5×7 tal que la dimensión de su espacio nulo es 2, entonces, para cualquier $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^5$, el sistema lineal $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución.

   Solución:

   FALSO. En este caso, el rango de la matriz es 5 y el sistema lineal tiene 7 incógnitas. Por ello, el sistema será compatible, pero la solución no será única.

8. Si A es una matriz 5×7 y si la dimensión de su espacio nulo es 4, entonces, para cualquier $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^5$, el sistema lineal $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución.

   Solución:

   FALSO. Ahora el rango de la matriz es 3 y es posible que el rango de la matriz aumentada $\left(A\middle|\mathbf{b}\right)$ sea 4, por lo que no habría solución.

9. Dado el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, es posible encontrar una transformación lineal $T\colon V \to V$ cuya nulidad coincida con su rango.

   Solución:

   FALSO. El espacio vectorial dado tiene dimensión n^2. Para que la nulidad coincida con el rango, la dimensión del espacio vectorial n^2 debe ser par. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ esto no es así, por lo que no es posible encontrar tal transformación.

10. Toda proyección ortogonal se puede describir como una composición de transformaciones lineales ortogonales.

Solución:

FALSO. Si fuera posible escribirla como composición de transformaciones ortogonales, la matriz asociada se escribiría como producto de matrices ortogonales, todas ellas de determinante ± 1. Por tanto, si esto es cierto, toda proyección debería tener determinante ± 1. Sin embargo esto no es cierto: por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

representa una proyección sobre el eje X en $\mathbb{R}^2$ y tiene determinante 0.

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular las dimensiones de los cuatro subespacios asociados a A y utilizar las columnas de A para determinar una base ortogonal B para su espacio columna.

Solución:

Si calculamos una forma escalonada de la matriz A obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observando los primeros coeficientes no nulos de cada fila, tenemos que $\mathrm{rg}(A) = 3$. Por tanto:

$$\mathrm{dim}(N(A)) = \mathrm{dim}(N(A^t)) = 0\,, \quad \mathrm{dim}(\mathcal{C}(A)) = \mathrm{dim}(\mathcal{C}(A^t)) = 3\,.$$

Por otro lado, las tres columnas de A ($\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ y $\boldsymbol{A}_3$) son linealmente independientes, por lo que $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3)$ es una base del espacio columna (el cual, además, coincide con $\mathbb{R}^3$). La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es una base ortonormal de $\mathcal{C}(A)$, pero no contiene ninguna columna de A. Así pues, utilizamos el método de Gram-Schmidt para determinar la base que nos piden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= (0, -1, -1)^t\,, \\ \boldsymbol{w}_2' &= (-1, 0, -1)^t - \frac{1}{2}\,(0, -1, -1)^t = \frac{1}{2}\,(-2, 1, -1)^t \end{aligned}$$

o, para simplificar nuestros cálculos,

$$\boldsymbol{w}_2 = (-2, 1, -1)^t\,.$$

El último vector sería

$$w_3' = (-1,-1,0)^t - \frac{1}{2}(0,-1,-1)^t - \frac{1}{6}(-2,1,-1)^t = \frac{2}{3}(-1,-1,1)^t$$

o alternativamente

$$w_3 = (-1,-1,1)^t \ .$$

Por tanto, la base ortogonal solicitada es:

$$B = \left((0,-1,-1)^t, (-2,1,-1)^t, (-1,-1,1)^t\right) \ .$$

b) Encontrar la matriz de cambio de base para pasar de la base B (calculada en el apartado (a)) a la canónica y obtener las coordenadas en la base B del vector $\mathbf{u} = (1,1,1)^t$.

Solución:

La matriz de cambio de base pedida es

$$\begin{aligned} T_{BB_0} = (T_{B_0B})^{-1} &= (w_1, w_2, w_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y las nuevas coordenadas son:

$$[\mathbf{u}]_B = T_{BB_0}\mathbf{u} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

c) Hallar la factorización QR de la matriz A.

Solución:

Del apartado (a) sabemos que la matriz Q puede ser escrita de la forma:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y por tanto la matriz R es:

$$\begin{aligned} R = Q^t A &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ descrita, para cada $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, por $T(\boldsymbol{v}) = A\,\boldsymbol{v}$. Decidir si T es un isomorfismo, si T es ortogonal y si T es una proyección ortogonal.

Solución:

Del apartado (a) sabemos que $\mathrm{dim}(N(A)) = 0$, es decir, $\mathrm{ker}(T) = N(A) = \{\mathbf{0}\}$, por tanto, T es un isomorfismo. Como A no es ortogonal, T no es ortogonal. Finalmente, como

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq A\,,$$

T no es una proyección ni, por supuesto, una proyección ortogonal.

Problema 3 Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ de los polinomios de grado 2 ó inferior sobre el cuerpo de los reales. Sea la operación definida en este conjunto por

$$\langle p, q \rangle = a_1 a_2 + 3 b_1 b_2 + 2 c_1 c_2 \, ,$$

donde $p(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2$ y $q(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2$.

a) Demostrar que esta operación define un producto interno.

Solución:

Veamos que se cumplen las cuatro condiciones necesarias:

i) Conmutatividad. Tenemos que

$$\langle p, q \rangle = a_1 a_2 + 3 b_1 b_2 + 2 c_1 c_2 = \langle q, p \rangle \; ,$$

usando la propiedad conmutativa de los números reales.

ii) Linealidad de la multiplicación por un escalar. Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \alpha \, p, q \rangle &= \left\langle \alpha a_1 + \alpha b_1 x + \alpha c_1 x^2, q \right\rangle = (\alpha a_1) a_2 + 3(\alpha b_1) b_2 + 2(\alpha c_1) c_2 \\ &= \alpha \, \langle p, q \rangle \; , \end{aligned}$$

donde hemos usado las propiedades asociativa y distributiva del producto de números reales.

iii) Distributiva. En este caso, si $r(x) = a_3 + b_3 x + c_3 x^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle p, q + r \rangle &= \left\langle p, (a_2 + a_3) + (b_2 + b_3) x + (c_2 + c_3) x^2 \right\rangle \\ &= a_1 (a_2 + a_3) + 3 b_1 (b_2 + b_3) + 2 c_1 (c_2 + c_3) \\ &= \langle p, q \rangle + \langle p, r \rangle \, , \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad distributiva de los reales.

iv) No negatividad. Obviamente

$$\langle p, p \rangle = a_1^2 + 3b_1^2 + 2c_1^2 \geqslant 0\,.$$

Además

$$\langle p, p \rangle = a_1^2 + 3b_1^2 + 2c_1^2 = 0\,,$$

si y sólo si cada uno de los sumandos es cero, es decir, cuando $p = 0$.

b) Determinar si los polinomios $p_1(x) = 1 + x$ y $p_2(x) = x^2 - x$ son ortogonales respecto a este producto interno.

Solución:

Tenemos que calcular el producto interno de ambos polinomios:

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \langle 1 + x, x^2 - x \rangle = 1 \cdot 0 + 3(1 \cdot (-1)) + 2(0 \cdot 1) = -3 \neq 0\,,$$

luego no son ortogonales.

c) Calcular la proyección ortogonal del polinomio $p_3(x) = 1 + x + x^2$ sobre el polinomio p_1, respecto a este producto interno.

Solución:

Sabemos que la proyección es

$$P_{p_1}(p_3) = \frac{\langle p_1, p_3 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} p_1(x) = \frac{1 + 3 - 0}{1 + 3 + 0} p_1(x) = p_1(x)\,.$$

Problema 4 Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ de los polinomios de grado 2 ó inferior sobre el cuerpo de los reales y consideremos el conjunto $B = \{1, x+1, x^2-1\}$.

a) Demostrar que es posible construir una base B_1 de $\mathbb{P}_2$ con el conjunto B.

Solución:

Puesto que $\mathrm{dim}(\mathbb{P}_2) = 3 = \mathrm{card}(B)$, basta con probar que los vectores de B son linealmente independientes. Para ello escribimos:

$$\alpha(1) + \beta(x+1) + \gamma(x^2-1) = 0\,.$$

Para que esta expresión sea cierta para cualquier valor de x, es necesario que el polinomio de la izquierda tenga todos sus coeficientes iguales a cero, lo cual implica que:

$$\gamma = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad \alpha + \beta - \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0\,.$$

Es decir, necesariamente los coeficientes de la combinación lineal anterior han de ser 0. En consecuencia, dichos vectores son linealmente independientes, como queríamos probar. De aquí se deduce que $B_1 = (1, x+1, x^2-1)$ es una base de $\mathbb{P}_2$.

b) Hallar la matriz de cambio de base para pasar de la base canónica B_0 a la base B_1.

Solución:

Las coordenadas de los polinomios de la base B_1 respecto a la base B_0 vienen dadas por:

$$[1]_{B_0} = (1,0,0)^t, \quad [x+1]_{B_0} = (1,1,0)^t, \quad \left[x^2-1\right]_{B_0} = (-1,0,1)^t.$$

Sabemos que $[p]_{B_1} = T_{B_1B_0}[p]_{B_0}$ donde $T_{B_1B_0} = T^{-1}_{B_0B_1}$. Luego

$$T_{B_1B_0} = T^{-1}_{B_0B_1} = \left([1]_{B_0}, [x+1]_{B_0}, \left[x^2-1\right]_{B_0}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Hallar las coordenadas del vector $p(x) = 1 + 5x + x^2$ con respecto a B_1.

Solución:

Basta con multiplicar la matriz anterior por las coordenadas de $p(x)$ respecto a B_0:

$$[p]_{B_1} = T_{B_1B_0}[p]_{B_0} = (-3, 5, 1)^t.$$

Problema 5 Sea la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ dada por:

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_2 - a_1 + a_1 x + (a_0 - a_1)x^2 .$$

a) Hallar la matriz A_T asociada a T.

Solución:

Fijamos la base $B_0 = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{P}_2$. Para obtener A_T necesitamos calcular la imagen (bajo T) de los vectores de dicha base:

$$T(1) = x^2 , \quad T(x) = -1 + x - x^2 , \quad T(x^2) = 1 .$$

Las coordenadas de estos vectores respecto a la base canónica son:

$$[T(1)]_{B_0} = (0,0,1)^t , \quad [T(x)]_{B_0} = (-1,1,-1)^t , \quad [T(x^2)]_{B_0} = (1,0,0)^t .$$

Por tanto, la matriz buscada es:

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

b) Determinar su espacio nulo y su espacio columna.

Solución:

Hallamos una forma escalonada de A_T:

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Se observa que el rango de A_T es 3, por tanto, necesitamos las tres columnas de A_T para generar su espacio columna. Como éste es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y tiene la misma dimensión, se tiene que

$$\mathcal{C}(A_T) = \mathbb{R}^3 .$$

Además sabemos que

$$\dim(N(A_T)) = 3 - 3 = 0 ,$$

por lo que

$$N(A_T) = \{0\} .$$

c) Decidir si T es un isomorfismo.

Solución:

Puesto que T es una transformación de un espacio vectorial en sí mismo y el núcleo de T, que coincide con $N(A_T)$, sólo contiene al elemento cero, T es un isomorfismo.

d) Determinar si T es ortogonal.

Solución:

Como las columnas de A_T no forman un conjunto ortonormal, A_T no es una matriz ortogonal y, por tanto, T no es una transformación ortogonal.

Problema 6 Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida mediante una proyección sobre el plano XZ y seguida de una reflexión respecto del plano YZ.

a) Encontrar la matriz de la transformación T.

Solución:

La matriz de la proyección es

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de la reflexión es

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de la composición será:

$$A_T = A_2 A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que el vector $(x, y, x)^t$ se transforma mediante T_1 en $(x, 0, z)^t$ y éste (bajo T_2) en $(-x, 0, z)^t$. Luego las columnas de la matriz A_T son las imágenes de los vectores de la base canónica bajo la transformación $T((x, y, z)^t) = (-x, 0, z)^t$.

b) Determinar si T es ortogonal.

Solución:

Como las columnas de A_T no forman un conjunto ortonormal, A_T no es una matriz ortogonal y, por tanto, T no es una transformación ortogonal.

Problema 7 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que A es diagonalizable.

Solución:

Para ver que A es diagonalizable tenemos que comprobar que las multiplicidades algebraicas y geométricas de todos los valores propios de A coinciden. Primero calculamos los valores propios resolviendo la ecuación característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma(A) = \{1, -2\}$$

donde las multimplicidades algebraicas $m_a(\lambda)$ de los valores propios λ de A son:

$$m_a(1) = 1\,, \quad m_a(-2) = 2\,.$$

Para determinar las multiplicidades geométricas hallamos los espacios propios asociados:

- Para $\lambda = 1$: $\quad N(A - I) = \text{Gen}\left((1, -1, 2)^t\right) \quad \Rightarrow \quad m_g(1) = 1.$
- Para $\lambda = -2$: $\quad N(A + 2I) = \text{Gen}\left((0, 1, 0)^t, (1, 0, 3)^t\right) \quad \Rightarrow \quad m_g(-2) = 2.$

Por tanto, concluimos que A es diagonalizable.

b) Hallar dos matrices P (invertible) y D (diagonal) tales que $A = P\,D\,P^{-1}$.

Solución:

Las matrices de la diagonalización son

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

c) ¿Las matrices P y D encontradas son únicas?

Solución:

No son únicas, ya que los valores propios pueden ser dispuestos en D en cualquier orden (el mismo que debe ser transferido a las columnas de P).

Problema 8 Calcular la descomposición en valores singulares de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución:

En primer lugar calculamos la matriz

$$A^t A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

y sus correspondientes valores propios:

$$\det(A^t A - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda-4)(\lambda-12)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma(A) = \{0, 4, 12\}$$

y, por tanto, los valores singulares, ordenados de mayor a menor, son:

$$\sigma_1 = \sqrt{12}\,, \quad \sigma_2 = 2\,, \quad \sigma_3 = 0\,.$$

De aquí se deduce que la matriz S de la descomposición buscada $A = U\,S\,V^t$ es:

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación determinamos los vectores propios de $A^t A$, con los que construiremos la matriz V:

- Para $\lambda = 12$: $\quad N(A^t A - 12\,I) = \mathrm{Gen}\,((1,2,1)^t)$.
- Para $\lambda = 4$: $\quad N(A^t A - 4\,I) = \mathrm{Gen}\,((1,0,-1)^t)$.
- Para $\lambda = 0$: $\quad N(A^t A) = \mathrm{Gen}\,((1,-1,1)^t)$.

Por tanto, normalizando para obtener columnas ortonormales v_1, v_2, v_3, escribimos:

$$V = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Por último, para obtener las dos columnas de la matriz U, u_1 y u_2, hacemos:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sigma_1} A\, v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t \,, \\ u_2 &= \frac{1}{\sigma_2} A\, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^t \,, \end{aligned}$$

por lo que

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Problema 9 Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ sobre $\mathbb{R}$ y sea la operación definida en este conjunto por

$$\langle p, q \rangle = 2a_1a_2 + 4b_1b_2\,,$$

donde $p(x) = a_1 + a_2x$ y $q(x) = a_2 + b_2x$.

a) Demostrar que esta operación define un producto interno.

Solución:

Para ver que es un producto interno, probamos las siguientes propiedades:

i) Conmutativa. Para todo par de polinomios p, q de $\mathbb{P}_1$:

$$\langle p, q \rangle = 2a_1a_2 + 4b_1b_2 = 2a_2a_1 + 4b_2b_1 = \langle q, p \rangle\,.$$

ii) Linealidad de la multiplicación por un escalar. Para todo $p, q \in \mathbb{P}_1$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\langle \alpha p, q \rangle = 2\alpha a_1a_2 + 4\alpha b_1b_2 = \alpha(2a_1a_2 + 4b_1b_2) = \alpha\langle p, q \rangle\,.$$

iii) Distributiva respecto de la suma de vectores. Para todo $p, q, r \in \mathbb{P}_1$,

$$\begin{aligned} \langle p, q + r \rangle &= 2a_1(a_2 + a_3) + 4b_1(b_2 + b_3) = 2a_2a_12a_1a_3 + 4b_1b_2 + 4b_1b_3 \\ &= \langle p, q \rangle + \langle p, r \rangle\,. \end{aligned}$$

iv) No negatividad. Por una parte, tenemos que, para todo $p \in \mathbb{P}_1$,

$$\langle p, p \rangle = 2a_1^2 + 4b_1^2 \geqslant 0$$

y, por otra, $\langle p, p \rangle = 0$ si y sólo si cada uno de los sumandos es igual a cero, lo cual implica que $p = 0$.

Concluimos que, efectivamente, es un producto interno.

b) Calcular la proyección ortogonal del polinomio $p(x) = 7x - 2$ sobre el polinomio $q(x) = -x + 3$ respecto a este producto interno.

Solución:

La proyección ortogonal de p sobre q es

$$P_q(p) = \frac{\langle p, q\rangle}{\langle q, q\rangle}\, q(x)$$

donde

$$\begin{aligned}
\langle p, q\rangle &= 2((-2)\cdot 3) + 4(7\cdot(-1)) = -40\,, \\
\langle q, q\rangle &= 2(3\cdot 3) + 4((-1)\cdot(-1)) = -22\,,
\end{aligned}$$

con lo que

$$P_q(p) = \frac{20}{11}\,(3 - x)\,.$$

Problema 10 Sean la matriz A y el vector $\mathbf{b}$ dados por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

a) Encontrar la condición que tienen que satisfacer las coordenadas de $\mathbf{b}$ para que el sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea compatible.

Solución:

Sabemos que $\mathbf{b}$ tiene que pertenecer al espacio columna de A. Puesto que A tiene columnas proporcionales, una de ellas es suficiente para generar $\mathcal{C}(A)$, por lo que debe ser

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2)^t \in \mathcal{C}(A) = \mathrm{Gen}\left((1,2)^t\right) \quad \Rightarrow \quad b_2 = 2b_1\,.$$

Luego $\mathbf{b} = \alpha(1,2)^t$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Sea $\mathbf{b} = (1,-2)^t$. Encontrar la solución del sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si ésta existe, o la solución de mínimos cuadrados, en caso contrario.

Solución:

Como $\mathbf{b}$ no satisface la condición determinada en (a), el sistema no tiene solución. Por ello, necesitamos calcular la solución de mínimos cuadrados. Es decir, necesitamos resolver:

$$A^t\,A\,\mathbf{x}_0 = A^t\,\mathbf{b}\,.$$

Como

$$A^t\,A = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

no es invertible, el sistema no tiene solución única. Si lo resolvemos, encontramos un número infinito de soluciones de mínimos cuadrados de la forma:

$$\mathbf{x}_0 = \left(x_1, -\frac{3}{5} - 2x_1\right)^t.$$

c) Encontrar el conjunto S de vectores que son ortogonales a $\mathbf{b} = (1, -2)^t$, según el producto escalar usual.

Solución:

Los vectores con coordenadas de la forma $(a_1, a_2)^t$ que son ortogonales a $\mathbf{b}$ satisfacen:

$$a_1 - 2a_2 = 0\,,$$

por tanto

$$S = \mathrm{Gen}\left((2,1)^t\right)\,.$$

d) La operación entre dos vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ definida mediante

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \mathbf{v}_1^t\,(A^t\,A + I_2)\,\mathbf{v}_2\,,$$

es un producto interno. Encontrar los valores de α para que $\mathbf{b} = (1, -2)^t$ y $\mathbf{c} = (4, \alpha)^t$ sean ortogonales de acuerdo con este producto interno. ¿Pertenece $\mathbf{c}$ a S?

Solución:

Si $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son ortogonales, su producto interno es cero. Así:

$$(1, -2)\,(A^t\,A + I_2)\begin{pmatrix} 4 \\ \alpha \end{pmatrix} = 4 - 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2\,.$$

Puesto que $\mathbf{c} = 2\,(2,1)^t$, concluimos que $\mathbf{c} \in S$.

e) Hallar la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{d} = (1, 0)^t$ según el producto escalar usual y el producto interno definido en (d).

Solución:

Sabemos que en general el proyector está dado por:

$$P_{\mathbf{d}}(\mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle}{\langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle}\, \mathbf{d}\,.$$

- Si usamos el producto escalar usual, tenemos que $\langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle = 1$ y $\langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle = 1$, por lo que
$$P_{\mathbf{d}}(\mathbf{b}) = (1, 0)^t\,.$$

- Si usamos el producto interno definido en (d), tenemos que $\langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle = 1$ y $\langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle = 21$; así
$$P_{\mathbf{d}}(\mathbf{b}) = \frac{1}{21}\,(1, 0)^t\ .$$