# Álgebra Lineal

## Tema 5. Introducción a las proyecciones

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

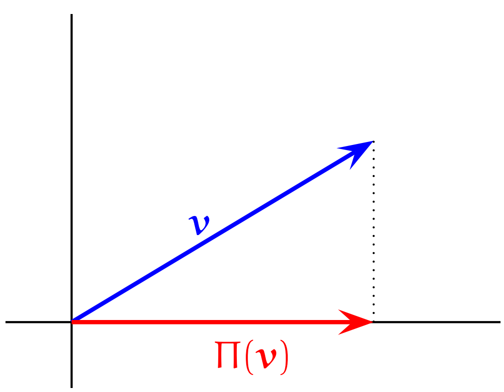
uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

# Índice general

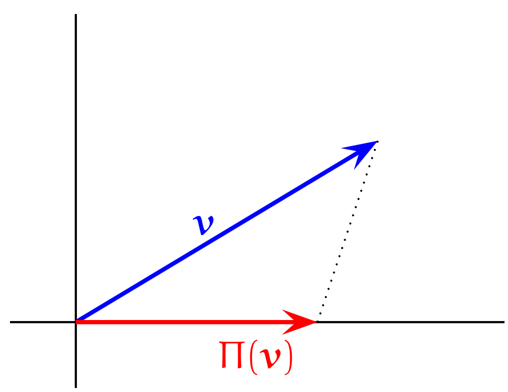
# Tema 5

# Introducción a las proyecciones

El concepto de ángulo entre vectores es bien conocido de cursos anteriores y geométricamente intuitivo. Este concepto nos permite "imaginar" el resultado de aplicar ciertas transformaciones lineales en los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, presentes constantemente en el día a día, como son las rotaciones o las proyecciones. En este tema nos vamos a centrar en estas últimas, que suelen interpretarse como la sombra que un vector dibujaría sobre una recta o un plano; la longitud de esta sombra dependerá, obviamente, del ángulo con que la luz incide en la recta o plano de proyección.




Proyección ortogonal




Proyección oblicua

Estas transformaciones, en particular las proyecciones ortogonales, serán estudiadas en detalle en el Tema 12 del curso en los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Queremos hacer notar aquí que, aunque las proyecciones con las que trabajaremos van inevitablemente ligadas a los conceptos de producto interno y ortogonalidad (introducidos en el Tema 9 del curso) es posible definir proyecciones en espacios vectoriales arbitrarios, en los que no se haya definido un producto interno.

## 5.1. Proyecciones en espacios vectoriales arbitrarios

Sea $V$ un espacio vectorial que no está dotado de un producto interno; en la práctica, esto quiere decir que no hemos definido ninguna manera de "medir" longitudes, distancias o ángulos. Consideremos dos subespacios de $V$, $W_1$ y $W_2$. Recordemos que $V$ es suma directa de $W_1$ y $W_2$, lo que representamos mediante $W_1 \oplus W_2$, si $V = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. En este caso, también se dice que $W_1$ es **complemento** de $W_2$ y viceversa. No obstante, obsérvese que un subespacio dado puede tener diferentes complementos.

**Ejemplo**

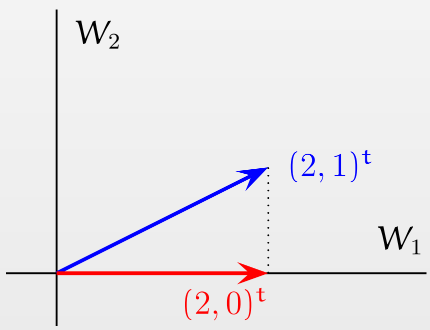
Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$; consideremos su subespacio $W_1 = \mathtt{Gen}((1,0)^t)$. Obviamente, $W_2 = \mathtt{Gen}((0,1)^t)$ es complemento de $W_1$, puesto que $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$ y ambos subespacios sólo comparten el vector $\mathbf{0}$. No obstante, también es posible escribir $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_3$, con $W_1 \cap W_3 = \{\mathbf{0}\}$, donde $W_3 = \mathtt{Gen}((1,1)^t)$; por tanto $W_3$ también es complemento de $W_1$.

Cuando en un espacio vectorial $V$ tenemos dos subespacios $W_1$ y $W_2$ que son uno complemento del otro, cada vector $\boldsymbol{v} \in V$ puede escribirse en la forma $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ con $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ y $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$. Se puede demostrar que esta "descomposición" de $\boldsymbol{v}$ como suma de dos vectores, uno de $W_1$ y otro de $W_2$, es única, por ser $V$ *suma directa* de estos subespacios. Entonces, es posible definir la **proyección sobre** $W_1$ **a lo largo de la dirección de** $W_2$, como la transformación lineal $\Pi : V \to V$ dada por $\Pi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}_1$.

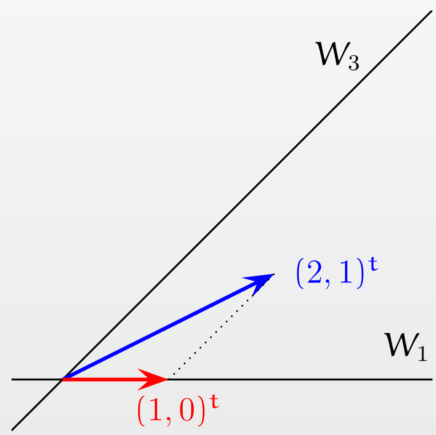
La interpretación desde un punto de vista geométrico es obvia:

**Ejemplo**

En $\mathbb{R}^2$ consideramos de nuevo los subespacios $W_1 = \mathtt{Gen}((1,0)^t)$, $W_2 = \mathtt{Gen}((0,1)^t)$ y $W_3 = \mathtt{Gen}((1,1)^t)$. Si proyectamos el vector $(2,1)^t$ sobre $W_1$ a lo largo de la dirección de $W_2$ estaremos proyectándolo de manera perpendicular sobre $W_1$, mientras que si proyectamos a lo largo de la dirección de $W_3$, tendremos una proyección oblicua, como se ve en la figura:




Proyección ortogonal




Proyección oblicua

Además podemos determinar las imágenes de ambas proyecciones. Si seguimos la dirección de $W_2$, podemos escribir

$$(2,1)^t = \underbrace{(2,0)^t}_{\in W_1} + \underbrace{(0,1)^t}_{\in W_2}$$

y por tanto su proyección sobre $W_1$ según $W_2$ será $(2,0)^t$. En cambio, si seguimos la dirección de $W_3$, escribimos

$$(2,1)^t = \underbrace{(1,0)^t}_{\in W_1} + \underbrace{(1,1)^t}_{\in W_3}$$

y su proyección sobre $W_1$ según $W_3$ es ahora $(1,0)^t$.

En general, para un vector arbitrario $(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$ tenemos las descomposiciones:

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2)^t &= \underbrace{(x_1, 0)^t}_{\in W_1} + \underbrace{(0, x_2)^t}_{\in W_2}, \\
(x_1, x_2)^t &= \underbrace{(x_1 - x_2, 0)^t}_{\in W_1} + \underbrace{(x_2, x_2)^t}_{\in W_3}
\end{aligned}
$$

por lo que la proyección sobre $W_1$ según $W_2$ está definida por

$$\Pi_1\left((x_1, x_2)^t\right) = (x_1, 0)^t$$

y la proyección sobre $W_1$ según $W_3$ está definida por

$$\Pi_2\left((x_1, x_2)^t\right) = (x_1 - x_2, 0)^t \,.$$

Consecuencia de la definición de proyección son las siguientes propiedades:

Si $\Pi : V \to V$ es la proyección de $V$ sobre $W_1$ a lo largo de la dirección de $W_2$ se verifica que:

- Si $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$, entonces $\Pi(\boldsymbol{w}_1) = \boldsymbol{w}_1$.
- Si $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$, entonces $\Pi(\boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{0}$.

Esto es equivalente a decir que $\ker(\Pi) = W_2$ y que $\mathrm{Im}(\Pi) = W_1$, por lo que podemos escribir que

$$V = \ker(\Pi) \oplus \mathrm{Im}(\Pi) \,.$$

Además, toda proyección definida de la forma anterior verifica la siguiente propiedad:

Una transformación lineal $\Pi : V \to V$ es una proyección si y sólo si $\Pi \circ \Pi = \Pi$.

**Ejemplo**

En el ejemplo anterior es inmediato verificar que

$$\begin{aligned}\Pi_1(\Pi_1((x_1, x_2)^t)) &= \Pi_1((x_1, 0)^t) = (x_1, 0)^t\,,\\ \Pi_2(\Pi_2((x_1, x_2)^t)) &= \Pi_2((x_1 - x_2, 0)^t) = (x_1 - x_2, 0)^t\,.\end{aligned}$$

Esta sencilla caracterización con frecuencia se utiliza como definición alternativa de proyección. De hecho es la que, por sencillez, nosotros utilizaremos en el curso para introducir las proyecciones. En contrapartida, con esta definición, el núcleo y la imagen son a priori desconocidos, mientras que en el caso inicial, la propia definición indica quiénes son estos.

**Ejemplo**

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ de los polinomios de grado 1 ó inferior. Es fácil ver que $\mathbb{P}_1$ puede escribirse como suma directa de $W_1 = \mathrm{Gen}(1 + x)$ y $W_2 = \mathrm{Gen}(1 - x)$, que representan, respectivamente, el conjunto de polinomios con término independiente igual al coeficiente de $x$ y el conjunto de polinomios cuyo término independiente es el opuesto del coeficiente de $x$. Entonces, dado un polinomio arbitrario $p(x) = a_0 + a_1 x$, podremos descomponerlo como:

$$p(x) = a_0 + a_1 x = \underbrace{\frac{a_0 + a_1}{2}(1 + x)}_{\in W_1} + \underbrace{\frac{a_0 - a_1}{2}(1 - x)}_{\in W_2}.$$

Si calculamos la proyección de $\mathbb{P}_1$ sobre $W_1$ según la dirección de $W_2$, escribiremos simplemente:

$$\Pi(a_0 + a_1 x) = \frac{a_0 + a_1}{2}(1 + x)\,.$$

Es trivial comprobar que el núcleo de la transformación lineal así definida es $W_2$ y que $\Pi \circ \Pi = \Pi$.