Álgebra Lineal

Tema 8. Producto interno en espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Índice general

Tema 8

Producto interno en espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$

En el curso hemos introducido el concepto de producto interno cuando trabajamos sobre el cuerpo de los números reales. En el caso de que el espacio vectorial V esté definido sobre el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$, se obtiene la siguiente definición, más general:

Dado el espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, se llama **producto interno** sobre V a una función de $V \times V$ en $\mathbb{C}$ que verifica las siguientes propiedades:

1. $\langle v_1, v_2 \rangle = \overline{\langle v_2, v_1 \rangle}$ para todo $v_1, v_2 \in V$.
2. $\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$ para todo $v_1, v_2, v_3 \in V$.
3. $\langle z\, v_1, v_2 \rangle = z \langle v_1, v_2 \rangle$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $v_1, v_2 \in V$.
4. $\langle v_1, v_1 \rangle \geqslant 0$ para todo $v_1 \in V$ y $\langle v_1, v_1 \rangle = 0$ si y sólo si $v_1 = 0$.

Observemos que, como consecuencia inmediata, se verifica la siguiente propiedad:

$$\langle v_1, z\, v_2 \rangle = \bar{z} \langle v_1, v_2 \rangle , \qquad \text{para todo } v_1, v_2 \in V \text{ y para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Es fácil ver que si restringimos la operación a los números reales, obtenemos las mismas propiedades que hemos estudiado en el Tema 9 del curso. En particular, a la propiedad 1) nos referimos como **simetría hermítica** o **simetría conjugada**, pero en el caso del cuerpo $\mathbb{R}$ se denomina simplemente *simetría*. Las propiedades 1), 2) y 3) confieren a la operación de producto interno el nombre de **forma bilineal hermítica** (o simplemente *forma bilineal* en el caso de $\mathbb{R}$).

Ejemplo

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ con la base canónica usual. Sobre este espacio definimos la siguiente operación: si $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^t, \mathbf{s} = (s_1, s_2)^t \in \mathbb{C}^2$, entonces

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{s} \rangle = \mathbf{z}^t \, \overline{\mathbf{s}} = z_1 \, \overline{s_1} + z_2 \, \overline{s_2} \,,$$

donde hemos definido el complejo conjugado $\overline{\mathbf{s}}$ de $\mathbf{s}$ de la manera natural: $\overline{\mathbf{s}} = (\overline{s}_1, \overline{s}_2)^t$. Es inmediato ver que es un producto interno: para todo $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^t, \mathbf{s} = (s_1, s_2)^t, \mathbf{u} = (u_1, u_2)^t \in \mathbb{C}^2$ y $a \in \mathbb{C}$, entonces

1. $\langle \mathbf{z}, \mathbf{s} \rangle = z_1 \, \overline{s_1} + z_2 \, \overline{s_2} = \overline{\overline{z_1} \, s_1 + \overline{z_2} \, s_2} = \overline{\langle \mathbf{s}, \mathbf{z} \rangle}$.

2. $\langle \mathbf{z} + \mathbf{s}, \mathbf{u} \rangle = (z_1 + s_1) \, \overline{u_1} + (z_2 + s_2) \, \overline{u_2} = \langle \mathbf{z}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{s}, \mathbf{u} \rangle$.

3. $\langle a \, \mathbf{z}, \mathbf{s} \rangle = a \, z_1 \, \overline{s_1} + a \, z_2 \, \overline{s_2} = a \, (z_1 \, \overline{s_1} + z_2 \, \overline{s_2}) = a \, \langle \mathbf{z}, \mathbf{s} \rangle$.

4. $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = z_1 \, \overline{z_1} + z_2 \, \overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 \geqslant 0$. Obviamente la expresión anterior es 0 si y sólo si $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Este es el producto escalar usual en $\mathbb{C}^2$. Ver el Tema de Ampliación 3 para repasar las propiedades de los números complejos.

Una vez definido un producto interno en un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, podemos definir la longitud, la distancia y el ángulo entre vectores, igual que hicimos en el caso de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo

Consideremos en el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ con el producto interno definido anteriormente: si $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)^t, \mathbf{s} = (s_1, s_2)^t \in \mathbb{C}^2$, entonces

$$\langle \boldsymbol{z}, \mathbf{s} \rangle = \boldsymbol{z}^t \,\overline{\mathbf{s}} = z_1 \,\overline{s_1} + z_2 \,\overline{s_2}\,.$$

Sean los vectores $\mathbf{u}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^2$ con coordenadas $\mathbf{u} = (1, i)^t$ y $\boldsymbol{w} = (1+i, 1-i)^t$. Su producto interno se calcula como:

$$\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{w} \rangle = 1\,(1-i) + i\,(1+i) = 1 - i + i + i^2 = 0\,,$$

es decir, ambos vectores son perpendiculares con respecto al producto interno dado. La norma de cada vector se calcula mediante:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{1 - i^2} = \sqrt{2}\,, \\ \|\boldsymbol{w}\| &= \sqrt{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle} = \sqrt{1 - i^2 + 1 - i^2} = \sqrt{4} = 2\,. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos determinar la distancia entre ambos vectores de la forma:

$$d(\mathbf{u}, \boldsymbol{w}) = \|\mathbf{u} - \boldsymbol{w}\| = \|(-i, -1+2i)^t\| = \sqrt{-i^2 + 1 - 4i^2} = \sqrt{6}\,.$$