Álgebra Lineal

Tema 13. Pseudoinversa y descomposición en valores singulares II

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Índice general

Tema 13

Pseudoinversa y descomposición en valores singulares II

13.1. Descomposición espectral generalizada

Dada una matriz arbitraria $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, vamos a considerar una descomposición de A en $r = rg(A)$ sumandos, semejante a la descomposición espectral de las matrices simétricas, conocida como **descomposición espectral generalizada**. Para ello, basta con observar que podemos rescribir la descomposición SVD de A de la forma:

$$A \;=\; U\,S\,V^t = \underbrace{(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_r,\mathbf{u}_{r+1},\ldots,\mathbf{u}_m)}_{m\times m}\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \sigma_r & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right)}_{m\times n}\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^t \\ \mathbf{v}_{r+1}^t \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^t \end{pmatrix}}_{n\times n}$$

$$
= \underbrace{(\sigma_1 \boldsymbol{u}_1, \dots, \sigma_r \boldsymbol{u}_r, 0, \dots, 0)}_{m\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_r^t \\ \boldsymbol{v}_{r+1}^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^t \end{pmatrix}}_{n\times n}
$$

$$
= \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 u_{11} v_{11} + \dots + \sigma_r u_{r1} v_{r1} & \dots & \sigma_1 u_{11} v_{1n} + \dots + \sigma_r u_{r1} v_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1 u_{1m} v_{11} + \dots + \sigma_r u_{rm} v_{r1} & \dots & \sigma_1 u_{1m} v_{1n} + \dots + \sigma_r u_{rm} v_{rn} \end{pmatrix}}_{m\times n}
$$

$$
= \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 u_{11} v_{11} & \dots & \sigma_1 u_{11} v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1 u_{1m} v_{11} & \dots & \sigma_1 u_{1m} v_{1n} \end{pmatrix}}_{m\times n} + \dots + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_r u_{r1} v_{r1} & \dots & \sigma_r u_{r1} v_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_r u_{rm} v_{r1} & \dots & \sigma_r u_{rm} v_{rn} \end{pmatrix}}_{m\times n}.
$$

En la ecuación anterior hemos implicitamente asumido que la base de nuestro espacio vectorial es la canónica. Luego

$$
\boxed{A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \, \boldsymbol{u}_i \, \boldsymbol{v}_i^t.}
$$

Es decir, A puede escribirse como la suma de r matrices $m \times n$ de la forma $\sigma_i \, \boldsymbol{u}_i \, \boldsymbol{v}_i^t$.

Las matrices correspondientes a los valores singulares de mayor valor recogen, en cierto sentido, la información más relevante de A. Por este motivo, se puede aproximar la matriz A considerando solo los $k < r$ primeros términos de la suma, para lo cual sólo hace falta almacenar $k \times (m+n+1)$ elementos, en lugar de los $m \times n$ de la matriz original. La aplicación más llamativa de esta aproximación basada en la descomposición espectral generalizada se encuentra en la compresión de imágenes bidimensionales, representadas por una matriz de $m \times n$ píxeles, y "comprimidas" (aproximadas) por las k primeras matrices de la descomposición.

Ejemplo

Imagen original

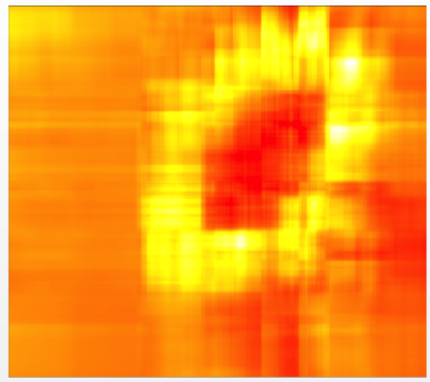

Imagen con las $k = 5$ primeras matrices

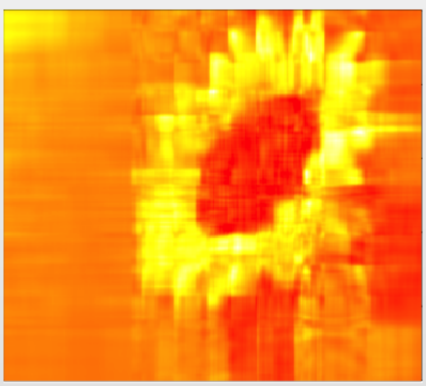

Imagen con $k = 10$

Imagen con $k = 30$

Estas figuras muestran una imagen de $300 \times 300 = 9 \times 10^4$ píxeles, para la que se ha hecho la descomposición SVD y que se ha reconstruido para diferentes valores de k, almacenando sólamente $601 \times k$ entradas.