Álgebra Lineal

Hoja 2. Sistemas de ecuaciones lineales

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 2

Sistemas de ecuaciones lineales

Problema 2.1 Expresar el vector a, si es posible, como una combinación lineal de los vectores incluidos en el conjunto S:

1. $\mathbf{a} = (2,3)^t$ con $S = \{(1,4)^t, (1,5)^t\}$.
2. $\mathbf{a} = (-1,0,1)^t$ con $S = \{(2,1,0)^t, (1,0,1)^t\}$.
3. $\mathbf{a} = (1,3,0)^t$ con $S = \{(1,0,4)^t, (2,1,5)^t, (3,3,0)^t, (4,2,1)^t\}$.
4. $\mathbf{a} = (1,0,1,1)^t$ con $S = \{(2,1,0,1)^t, (3,0,0,2)^t\}$.

Problema 2.2 Resolver los siguientes sistemas utilizando eliminación *gaussiana* aplicada a las ECUACIONES. Dibujar el conjunto de soluciones como los puntos de intersección de las líneas que representa cada ecuación. Usar las soluciones para expresar el vector de constantes (términos independientes) como una combinación lineal de vectores.

a) $$\begin{cases} x - 6y = 12\,, \\ x + 2y = 6\,. \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x + y = 1\,, \\ x - y = -1\,. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2(1 - 3y) = 4(x - 2)\,, \\ x + y = 4(x - y - 3)\,. \end{cases}$

Problema 2.3 Para cada uno de los siguientes sistemas, escribir la matriz ampliada correspondiente y usar la eliminación *gaussiana* en dicha matriz para obtener el conjunto de soluciones. Utilizar el concepto de rango para determinar la cardinalidad de dicho conjunto y describirlo mediante vectores columna.

a) $\begin{cases} x + z = 4\,, \\ x - y + 2z = 5\,, \\ 4x - y + 5z = 17\,. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2a + b - c = 2\,, \\ 2a + c = 3\,, \\ a - b = 0\,. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = 3\,, \\ 2x + y = 4\,, \\ x - y + z = 1\,. \end{cases}$

Problema 2.4 Ciertos números de tres dígitos tienen dos propiedades:

a) El dígito de las decenas y el de las unidades suman 5.

b) Si los dígitos se escriben en orden inverso y se resta el número que resulta al número original se obtiene 792.

Encontrar todos los números de tres cifras que verifiquen estas propiedades.

Problema 2.5 Calcular el espacio nulo de la matriz y el espacio columna de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.6 Escribir en forma escalonada reducida las matrices que corresponden a los siguientes sistemas y determinar su solución:

a) $$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0\,, \\ x + 2y + z = 3\,, \\ x + 3y + 3z = 7\,. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4\,, \\ 2x + 6y - 4z = -1\,, \\ x + 3y - 3z = 4\,. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 7x_4 = -2\,, \\ 3x_1 + 2x_2 + 12x_3 - 5x_4 = 6\,, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = -10\,. \end{cases}$$

Problema 2.7 Calcular la inversa de las siguientes matrices utilizando operaciones *gaussianas*:

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{pmatrix}.$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Problema 2.8 Resolver el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales $A\,\mathbf{x} = 0$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinar la cardinalidad del conjunto de soluciones del sistema no homogéneo $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (0, 0, -2, 2)^t$. Encontrar dicho conjunto.

Problema 2.9 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Encontrar una matriz P_1 tal que $B_1 = P_1\,A$ sea la matriz que se obtiene al permutar las filas primera y tercera de la matriz A.

2. Encontrar una matriz P_2 tal que $B_2 = P_2\,A$ sea la matriz que se obtiene al permutar las filas segunda y tercera de A y sustituir la fila primera por ella misma multiplicada por 2 menos la tercera fila.

3. ¿Son las matrices B_1 y B_2 equivalentes?

Hoja 2

Soluciones

Problema 2.1 La solución se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones lineales correspondientes:

1. $(2,3)^t = 7\,(1,4)^t - 5\,(1,5)^t$.

2. No es posible.

3. $(1,3,0)^t = -10\,(1,0,4)^t + 8\,(2,1,5)^t - \dfrac{5}{3}\,(3,3,0)^t + 0\,(4,2,1)^t$.

4. No es posible.

Problema 2.2 Las soluciones pedidas son:

a) $(12,6)^t = \dfrac{15}{2}\,(1,1)^t - \dfrac{3}{4}\,(-6,2)^t$.

b) $(1,-1)^t = 0\,(1,1)^t + 1\,(1,-1)^t$.

c) $10,12)^t = \dfrac{122}{23}\,(1,3)^t + \dfrac{18}{23}\,(6,-5)^t$.

Problema 2.3

a) $S = \{(x,y,z)^t : x = 4 - z\,, y = z - 1\,, z \in \mathbb{R}\}$; $\quad \mathrm{rg}(A) = 2$; sistema compatible indeterminado.

b) $S = \{(1,1,1)^t\}$; $rg(A) = 3$; sistema compatible determinado.

c) $S = \left\{(x,y,z)^t \colon x = \frac{1}{3}(5-z), y = \frac{2}{3}(1+z), z \in \mathbb{R}\right\}$; $rg(A) = 2$; sistema compatible indeterminado.

Problema 2.4 Si el número se escribe como $10^2 a_2 + 10a_1 + a_0$ con $0 \leqslant a_1, a_0 \leqslant 9$ y $1 \leqslant a_2 \leqslant 9$, entonces las ecuaciones son: $a_0 + a_1 = 5$ y $10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 - (10^2 a_0 + 10a_1 + a_2) = 792$. La solución es $a_2 = 8 + a_0$ y $a_1 = 5 - a_0$. Luego las soluciones al problema son 850 y 941.

Problema 2.5 El espacio nulo se calcula resolviendo el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y la solución es

$$N(A) = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = \alpha(-13, 6, 5, 0)^t + \beta(1, -2, 0, 5)^t \colon \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

El espacio columna viene dado por

$$\mathcal{C}(A) = \left\{(x_1, x_2, x_1 + x_2)^t \colon x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Problema 2.6 Las soluciones son:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -55/18 \\ 0 & 0 & 1 & -9/2 \end{array}\right)$.

c) $\left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Problema 2.7 Las inversas buscadas son:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

b) B no es invertible.

c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 5 & -4 & -3 & 2 \\ 2 & -3/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$

Problema 2.8 Es un sistema compatible determinado por lo que la única solución será la trivial $S = \{(0,0,0,0)^t\}$. La cardinalidad del conjunto de soluciones del sistema no homogéneo es 1: $S = \{(3,-3,1,-1)^t\}$.

Problema 2.9 Las matrices buscadas son:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además B_1 y B_2 son equivalentes ya que existen matrices P y Q tales que $B_1 = P\,B_2\,Q^{-1}$, con $Q = I_3$ y

$$P = P_1\,P_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$