Álgebra Lineal

Hoja 3. Espacios vectoriales

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 3

Espacios vectoriales

Problema 3.1 Demostrar que el conjunto $\mathbb{P}_3$ de polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ de grado $\leqslant 3$ es un espacio vectorial (siendo a_0, a_1, a_2, a_3 números reales cualesquiera y x la variable). Demostrar que el conjunto $P^{(3)}$ de polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ de grado exactamente 3 (es decir, con $a_3 \neq 0$) no es un espacio vectorial.

Nótese que en general el conjunto de polinomios $\mathbb{P}_n$ de grado menor o igual que $n \in \mathbb{N}$ es un espacio vectorial.

Problema 3.2 Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ decidir cuál de los siguientes subconjuntos son subespacios:

1. $\{(x, 0, z)^t : x, z \in \mathbb{R}\}$.
2. $\{(x, y, z)^t : x = 2y\, ,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
3. $\{(x, y, z)^t : x = 2y + 5\, ,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Problema 3.3 Consideremos las tres matrices del espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que el conjunto de todas las combinaciones lineales de A, B, C es un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Problema 3.4 Determinar si los conjuntos de polinomios $S_1 = \{p \in \mathbb{P}_2 \colon p(0) = 0, p'(0) = 0\}$ y $S_2 = \{p \in \mathbb{P}_2 \colon p(0) = 0, p'(0) = 1\}$ son subespacios de $\mathbb{P}_2$.

Problema 3.5 Determinar si los conjuntos de matrices

$$S_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

y $S_2 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \colon \det(A) = 0 \right\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Problema 3.6 Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y consideremos sus subespacios S_1, S_2 y S_3. Determinar si las siguientes expresiones son ciertas o no.

a) $S_1 \cap (S_2 + S_3) = (S_1 \cap S_2) + (S_1 \cap S_3)$.

b) $(S_1 \cap S_2) + (S_1 \cap S_3) = S_1 \cap (S_2 + (S_1 \cap S_3))$.

Problema 3.7 Sea T el subconjunto de todas las matrices en $\mathbb{R}^{n\times n}$ (con $n \in \mathbb{N}$) que tienen traza nula. Determinar si T es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Hoja 3

Soluciones

Problema 3.1 Demostrar que $\mathbb{P}_3$ es un espacio vectorial se sigue de la definición. Para demostrar que $P^{(3)}$ no es un espacio vectorial basta con dar un contra-ejemplo: $p_1(x) = 1 - x^3$ y $p_2(x) = 1 + x^3$ pertenecen a $P^{(3)}$, pero su suma $(p_1 + p_2)(x) = 2 \notin P^{(3)}$.

Problema 3.2 El resultado es:

1. $\{(x, 0, z)^t : x, z \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial.

2. $\{(x, y, z)^t : x = 2y\, ,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial.

3. $\{(x, y, z)^t : x = 2y + 5\, ,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ no es un espacio vectorial ya que no contiene al vector $(0, 0, 0)^t$.

Problema 3.3 *Indicación:* basta probar las propiedades de clausura para la suma y para el producto por escalares.

Problema 3.4 El conjunto $S_1 = \{p(x) = bx^2\}$ sí es un subespacio de $\mathbb{P}_2$ al ser cerrado bajo la suma y el producto por un escalar. El conjunto $S_2 = \{p(x) = x + b\,x^2\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_2$ al no ser cerrado bajo las operaciones anteriormente citadas.

Problema 3.5 El conjunto S_1 no es un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ya que no es cerrado bajo la multiplicación por escalares reales. El conjunto S_2 tampoco es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ya que no es cerrado bajo la suma. Si A y B son dos matrices con determinante nulo, no es cierto en general que $\det(A+B)=0$. Por ejemplo,

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A+B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\det(A+B)=-2\neq 0$.

Problema 3.6

a) Falso. Si $S_1=\mathcal{C}((1,1)^t)$, $S_2=\mathcal{C}((1,0)^t)$ y $S_3=\mathcal{C}((0,1)^t)$, entonces $S_2+S_3=\mathbb{R}^2$ y $S_1\cap\mathbb{R}^2=S_1$. Por otra parte, $S_1\cap S_2=\{\mathbf{0}\}$ y $S_1\cap S_3=\{\mathbf{0}\}$, de manera que el miembro de la derecha consta sólo del elemento nulo $\mathbf{0}$.

b) Cierto. Si $\boldsymbol{v}\in(S_1\cap S_2)+(S_1\cap S_3)$, entonces $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, donde $\boldsymbol{v}_1\in S_1\cap S_2$ y $\boldsymbol{v}_2\in S_1\cap S_3$. Esto implica que $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in S_1$ y, en consecuencia, $\boldsymbol{v}\in S_1$. Por otra parte, puesto que también $\boldsymbol{v}_1\in S_2$ y $\boldsymbol{v}_2\in S_1\cap S_3$, concluimos que $\boldsymbol{v}\in S_2+(S_1\cap S_3)$. Por tanto, $\boldsymbol{v}\in S_1\cap(S_2+(S_1\cap S_3))$.

En sentido inverso, si $\boldsymbol{w}\in S_1\cap(S_2+(S_1\cap S_3))$, entonces $\boldsymbol{w}\in S_1$ y también $\boldsymbol{w}\in S_2+(S_1\cap S_3)$. A partir de esta segunda expresión podemos escribir $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2$, con $\boldsymbol{w}_1\in S_2$ y $\boldsymbol{w}_2\in S_1\cap S_3$; en particular, $\boldsymbol{w}_2\in S_1$. Además, sabemos que $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2\in S_1$. Puesto que S_1 es un espacio vectorial, concluimos que también $\boldsymbol{w}_1\in S_1$. Por ello, $\boldsymbol{w}_1\in S_1\cap S_2$ y podemos escribir finalmente: $\boldsymbol{w}\in(S_1\cap S_2)+(S_1\cap S_3)$.

Problema 3.7 Dadas dos matrices $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $\operatorname{tr}(A)=0$ y $\operatorname{tr}(B)=0$, entonces $\operatorname{tr}(\alpha A)=\alpha\operatorname{tr}(A)=0$ (para todo escalar $\alpha\in\mathbb{R}$) y $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)=0$. Luego T es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$.