Álgebra Lineal

Hoja 10. Bases ortogonales

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

AUTORES: J. SALAS, A. TORRENTE Y E.J.S. VILLASEÑOR

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 10

Bases ortogonales

Problema 10.1 Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales, respecto al producto escalar usual:

a) $\{(-1,4,-3)^t, (5,2,1)^t, (3,-4,-7)^t\}$.

b) $\{(3,-2,1,3)^t, (-1,3,-3,4)^t, (3,8,7,0)^t\}$.

c) $\{(2,-7,-1)^t, (6,3,-9)^t, (3,1,-1)^t\}$.

d) $\{(5,-4,0,3)^t, (-4,1,-3,8)^t, (3,3,5,-1)^t\}$.

Problema 10.2 Probar que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto al producto escalar usual y expresar $\mathbf{x}$ como combinación lineal de los $\mathbf{u}_i$'s.

a) $\mathbf{u}_1 = (1,0,1)^t\,, \quad \mathbf{u}_2 = (-1,4,1)^t\,, \quad \mathbf{u}_3 = (2,1,-2)^t\,, \quad \mathbf{x} = (8,-4,-3)^t$.

b) $\mathbf{u}_1 = (3,-3,0)^t\,, \quad \mathbf{u}_2 = (2,2,-1)^t\,, \quad \mathbf{u}_3 = (1,1,4)^t\,, \quad \mathbf{x} = (5,-3,1)^t$.

Problema 10.3 Demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es linealmente independiente. Sea W el espacio vectorial generado por cada conjunto. Usar el método de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal de W. Finalmente encontrar una base ortonormal de W.

a) $\{(3,0,-1)^t, (8,5,-6)^t\}$.

b) $\{(1,-4,0,1)^t, (7,-7,-4,1)^t\}$.

c) $\{(0,4,2)^t, (5,6,-7)^t\}$.

d) $\{(3,-1,2,-1)^t, (-5,9,-9,3)^t\}$.

Problema 10.4 Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\left\{(x,y,z)^t : x-2y+3z=0\right\} .$$

Encontrar una base ortonormal de W. Extender la base obtenida a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Problema 10.5 Consideremos la transformación lineal $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisface $\mathsf{T}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ y $\mathsf{T}(\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$.

1. ¿Preserva la longitud?
2. Encontrar el núcleo y la imagen de esta transformación y sus correspondientes dimensiones.

Problema 10.6 Encontrar una base ortogonal para el espacio columna de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Problema 10.7 Encontrar, si es posible, la factorización QR de las matrices del Problema 10.6.

Problema 10.8 Demostrar que $S = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ es una base de $\mathbb{R}^3$, siendo $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1)^t$, $\boldsymbol{v}_2 = (2, -1, 1)^t$ y $\boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 5)^t$.

1. Hallar una base ortonormal B de $\mathbb{R}^3$.

2. Encontrar las coordenadas de $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ respecto a la base B.

3. Obtener la matriz de cambio de base T_{SB} para pasar de la base S a la base B. Demostrar que $[\boldsymbol{v}_3]_S = T_{SB}\,[\boldsymbol{v}_3]_B$.

Hoja 10

Soluciones

Problema 10.1 Sólo es ortogonal el conjunto (b).

Problema 10.2 En $\mathbb{R}^3$, de dimensión 3, basta con ver que los 3 vectores son linealmente independientes, es decir, que $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Además, podemos expresar $\mathbf{x}$ como combinación de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ de la forma:

a) $\mathbf{x} = \frac{5}{2}\mathbf{u}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$.

b) $\mathbf{x} = \frac{4}{3}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_3$.

Problema 10.3 Para comprobar que son linealmente independientes vemos que $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Además:

a) $B' = ((3,0,-1)^t, (-1,5,-3)^t)$ es una base ortogonal.
$B'' = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}(3,0,-1)^t, \frac{1}{\sqrt{35}}(-1,5,-3)^t\right)$ es la correspondiente base ortonormal.

b) $B' = ((1,-4,0,1)^t, (5,1,-4,-1)^t)$ es una base ortogonal.
$B'' = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}(1,-4,0,1)^t, \frac{1}{\sqrt{43}}(5,1,-4,-1)^t\right)$ es la correspondiente base ortonormal.

c) $B' = ((0,4,2)^t, (5,4,-8)^t)$ es una base ortogonal.
$B'' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (0,4,2)^t, \frac{1}{\sqrt{105}} (5,4,-8)^t \right)$ es la correspondiente base ortonormal.

d) $B' = ((3,-1,2,-1)^t, (4,6,-3,0)^t)$ es una base ortogonal.
$B'' = \left(\frac{1}{\sqrt{15}} (3,-1,2,-1)^t, \frac{1}{\sqrt{61}} (4,6,-3,0)^t \right)$ es la correspondiente base ortonormal.

Problema 10.4 W tiene dimensión 2 (es un plano) y está generado por los vectores $\boldsymbol{v}_1 = (2,1,0)^t$ y $\boldsymbol{v}_2 = (-3,0,1)^t$. Usando Gram-Schmidt y dividiendo por la norma de cada vector, obtenemos: $B_W = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (2,1,0)^t, \frac{1}{\sqrt{70}} (-3,6,5)^t \right)$.

Para obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, buscamos un vector linealmente independiente de $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ (o simplemente que no esté en W); por ejemplo tomamos $\boldsymbol{v}_3 = (1,-2,3)^t$, el vector normal al plano $x - 2y + 3z = 0$. En nuestro caso particular no es necesario usar Gram-Schmidt (porque $\boldsymbol{v}_3$ ya es ortogonal a $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$); dividiendo por su norma obtenemos la base ortonormal de $\mathbb{R}^3$: $B_{\mathbb{R}^3} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (2,1,0)^t, \frac{1}{\sqrt{70}} (-3,6,5)^t, \frac{1}{\sqrt{14}} (1,-2,3)^t \right)$.

Problema 10.5 Tenemos que:

1) No preserva la longitud; por ejemplo: $1 = \|\boldsymbol{e}_1\| \neq \|T(\boldsymbol{e}_1)\| = \sqrt{2}$.

2) $\ker(T) = \{\boldsymbol{0}\}$; $\quad \mathrm{nul}(T) = 0$; $\quad \mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ y $\quad \mathrm{rg}(T) = 2$.

Problema 10.6 Todas las matrices tienen columnas linealmente independientes, por lo que aplicando Gram-Schmidt a dichas columnas se obtiene:

a) $B_{\mathcal{C}(A)} = ((3,1,-1,3)^t, (1,3,3,-1)^t, (-3,1,1,3)^t)$.

b) $B_{\mathcal{C}(A)} = ((1,-1,-1,1,1)^t, (1,0,1,-1,1)^t, (1,0,1,1,-1)^t)$.

c) $B_{\mathcal{C}(A)} = ((-1,3,1,1)^t, (3,-1,1,-1)^t, (-1,-1,3,-1))$.

d) $B_{\mathcal{C}(A)} = ((1,-1,0,1,1)^t, (-1,1,2,1,1)^t, (1,1,0,-1,1)^t)$.

Problema 10.7 Como las matrices tienen columnas linealmente independientes, es posible encontrar la factorización QR en todos los casos. Se tiene:

a) $Q = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad R = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 10 & -20 & 15 \\ 0 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$

b) $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{5} & -1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{5} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} & 6\sqrt{5} \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

c) $Q = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 6 & -18 & 3 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

d) $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{8} & 1/2 \\ -1/2 & 1/\sqrt{8} & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{8} & 0 \\ 1/2 & 1/\sqrt{8} & -1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{8} & 1/2 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 0 & 4/\sqrt{2} & 6/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 6/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

Problema 10.8 Basta con probar que son linealmente independientes. Además:

1) Usando Gram-Schmidt:

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^t, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)^t, \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)^t \right).$$

2) Si utilizamos las fórmulas empleadas en Gram-Schmidt y despejamos los vectores $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ en función de los obtenidos en el apartado (a) resulta:

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{v}_2]_B &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(3, -\sqrt{3}, 0\right)^t , \\
[\boldsymbol{v}_3]_B &= \left(3\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{3}\right)^t .
\end{aligned}
$$

3) La matriz de cambio de base es

$$
T_{BS} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3/\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{3/2} & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}
$$

y su inversa es

$$
T_{SB} = T_{BS}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2} & -2\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{2/3} & 2/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} .
$$

Obviamente $T_{SB}\,[\boldsymbol{v}_3]_B = T_{SB}\,\left(3\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{3}\right)^t = (0,0,1)^t = [\boldsymbol{v}_3]_S$.