uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Apuntes

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 1

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

BY NC SA

Índice general

1

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE EDOs

Este primer tema está dedicado a las ecuaciones diferenciales de primer orden, los métodos principales de resolución y su aplicación al estudio de problemas geométricos, físicos o procedentes de las ciencias sociales.

Contenido

1.1 Introducción

Una **ecuación diferencial ordinaria** (abreviado EDO) es una relación entre una función y sus derivadas. Aparecen en multitud de contextos, como física, química, ingeniería, sociología, etc.

***Ejemplo* 1.** La caída libre de un objeto se describe con la ecuación:

$$my'' = mg \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{g}{2}t^2 + v_0 t + y_0,$$

donde $y = y(t)$ es la altura del objeto en tiempo t, m es la masa y g es la aceleración de la gravedad. Obtenemos la altura en términos de la posición inicial y_0 y de la velocidad inicial v_0 .

En este primer ejemplo ha bastado integrar dos veces la identidad dada, la EDO $y'' = g$.

***Ejemplo* 2.** Según la **Ley de enfriamiento de Newton**, cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y su medio ambiente no es demasiado grande, el calor transferido es proporcional a la diferencia de temperaturas. Se tiene la igualdad

$$T'(t) = -k(T - T_m),$$

donde $T = T(t)$ es la temperatura en el instante t, k es una constante positiva que caracteriza la difusión del calor y T_m es la temperatura del medio. Este es un segundo ejemplo de EDO que aprenderemos a resolver.

***Ejemplo* 3.** La **Ley malthusiana de crecimiento demográfico** establece que la tasa de crecimiento es proporcional a la población existente $P = P(t)$. Si se tienen también en cuenta los efectos negativos derivados de la masificación, hay que añadir un término de decrecimiento. Se obtiene la EDO

$$P'(t) = aP - bP^2.$$

que es la **ecuación logística**, donde a y b son constantes positivas.

En general una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una expresión de la forma:

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{n)}(x)) = 0,$$

para alguna función F. El **orden** de la ecuación es el de la derivada más alta que aparece en la expresión. Su solución, $y = y(x)$, contendrá n constantes arbitrarias, tantas como el orden. Por tanto, la solución es una **familia de curvas**, que llamaremos **curvas integrales** o simplemente **soluciones**. Las soluciones pueden estar en forma implícita, en ese caso no obtendremos una expresión para $y(x)$. Para obtener el valor de las constantes necesitaremos además datos, uno por cada constante. De esa manera identificamos de la familia de curvas integrales aquella que pasa por un punto determinado. Al conjunto de una ecuación junto con sus datos lo llamamos **problema**, por ejemplo:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

Si tenemos una familia de curvas, podemos obtener la ecuación diferencial de la que es solución derivando tantas veces como constantes hay en la familia de curvas y eliminando las constantes.

***Ejemplo* 4.** De la famila de circunferencias con centro el origen se obtiene la EDO

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad \Longrightarrow \quad 2x + 2yy' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

En este tema nos concentraremos en estudiar ecuaciones de primer orden, es decir expresiones de la forma

$$F(x, y, y') = 0,$$

pero supondremos siempre que se puede despejar la variable y' de la identidad anterior. Tendremos así ecuaciones de la forma

$$y' = f(x, y). \tag{1.1}$$

También será útil escribir esta ecuación en su forma diferencial con la notación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{1.2}$$

Es trivial pasar de una notación a la otra, y usaremos cada una a conveniencia.

***Ejemplo* 5.** La ecuación del ejemplo anterior se puede escribir como

$$xdx + ydy = 0.$$

Una vez resuelta la ecuación, la solución del problema añadiendo los datos puede no ser única, pero podemos garantizar que sí lo es en muchos casos:

Teorema 1.1. *(de Picard)*

Si $f(x,y)$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *son continuas en un rectángulo cerrado* $R \subset \mathbb{R}^2$*, a través de cada punto del interior de* R *pasa una y solo una curva integral de la ecuación*

$$y' = f(x,y).$$

1.2 Métodos elementales

1.2.1 Ecuaciones de variables separadas

Son las que pueden escribirse en la forma $y' = g(x)h(y)$. Son las más sencillas, se resuelven separando las variables:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

e integrando los dos lados de la igualdad, cada uno respecto de la variable que aparece en él. Englobamos en una las constantes de integración de los dos lados y finalmente simplificamos. En la forma diferencial (1.2) se debe tener $M(x,y) = M(x)$, $N(x,y) = N(y)$.

***Ejemplo* 6.**

$$y' = x^2 y \implies \frac{dy}{y} = x^2 dx \implies \log|y| = \frac{x^3}{3} + C \implies y = K\mathrm{e}^{x^3/3}.$$

1.2.2 Cambios de variables

Escribiendo la nueva variable $z = A(x,y)$, la EDO $y' = f(x,y)$ en las variables (x,y) se convierte en la EDO en las variables (z,x),

$$z' = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} y'.$$

La idea es que la nueva EDO sea más fácil de resolver.

***Ejemplo* 7.** Las ecuaciones de la forma $y' = f(ax+by+c)$ se resuelven haciendo el cambio de variable $z = ax + by + c$, que las reduce a ecuaciones de variables separadas, $z' = a + bf(z)$.

1.2.3 Ecuaciones homogéneas

Una función f de dos variables se dice **homogénea de grado** α si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0.$$

La ecuación $y' = f(x,y)$ se denomina **homogénea** si f es homogénea de grado 0. Se resuelve haciendo el cambio de variable $z = \frac{y}{x}$, que la reduce a una ecuación de variables separadas en las variables (x,z).

***Ejemplo* 8.**

$$y' = \frac{x+y}{x-y}, \qquad z = \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad z' = \frac{1}{x}(y'-z) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1-z}{1+z^2}\,dz = \frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{arc\,tg} z - \frac{1}{2}\log(1+z^2) = \log|x| + K \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \log\sqrt{x^2+y^2} + K.$$

1.2.4 Ecuaciones exactas

Una ecuación de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

se denomina **exacta** si existe una función f tal que:

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

y a la expresión $Mdx + Ndy$ se la llama **diferencial exacta**. La función f se llama potencial del campo $\vec{F} = (M,N)$, pues se verifica que $\nabla f = \vec{F}$.

Proposición 1.2. *Una ecuación diferencial $Mdx + Ndy = 0$ es exacta si y sólo si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. En ese caso su solución general es $f(x,y) = C$, donde f es el potencial del campo (M,N).*

El resultado se puede leer diciendo que el potencial existe si y solo si el campo es consevativo.

***Ejemplo* 9.** $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$ es exacta porque $\frac{\partial(e^y)}{\partial y} = \frac{\partial(xe^y+2y)}{\partial x} = e^y$. Hallamos la solución $f(x,y) = C$, donde:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^y \implies f(x,y) = xe^y + K(y) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = xe^y + 2y \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \quad xe^y + 2y = xe^y + K'(y)$$

Por tanto $K(y) = y^2 + c$. Finalmente $f(x,y) = xe^y + y^2 + c$, luego la solución es $xe^y + y^2 = C$.

Algunas diferenciales exactas reconocibles fácilmente son:

$$d(xy) = x\,dy + y\,dx\,, \qquad d(x^2+y^2) = 2(x\,dx + y\,dy)\,,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\,, \qquad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\,.$$

1.2.5 Factores integrantes

Una ecuación (no exacta) de la forma $Mdx + Ndy = 0$ puede multiplicarse por una función arbiraria distinta de cero, $\mu(x,y)$, dando lugar a la ecuación equivalente

$$\mu M dx + \mu N dy = 0.$$

Llamamos a μ **factor integrante** si esta última ecuación es exacta, es decir, si

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu N) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu M).$$

No existe fórmula general para encontrar un factor integrante, pero normalmente buscaremos factores integrantes en la forma más sencilla posible (por ejemplo, que dependan de una sola variable) y luego resolvemos la ecuación. Solo necesitamos **un factor** integrante, luego al hallar μ no pondremos las constantes de integración.

***Ejemplo* 10.** Comprobamos que no es exacta y buscamos un factor $\mu = \mu(x)$ en:

$$ydx + (x^2y - x)dy = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mu(x)ydx + \mu(x)(x^2y - x)dy = 0$$

que debe ser exacta, luego:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)y) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)(x^2y - x)) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{-2}{x} \quad\Longrightarrow\quad \mu(x) = \frac{1}{x^2}.$$

La nueva ecuación: $\dfrac{y}{x^2}dx + \left(y - \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$, es exacta, luego su solución es $f(x,y) = C$, donde:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2} \Longrightarrow f(x,y) = -\dfrac{y}{x} + C(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = y - \dfrac{1}{x} \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad y - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + C'(y);$$

por tanto $C(y) = \dfrac{y^2}{2} + c$ y la solución es $\dfrac{-y}{x} + \dfrac{y^2}{2} = K.$

1.2.6 Ecuaciones lineales

Llamamos ecuación **lineal** a aquella en que la derivada de orden mayor es una función lineal de las derivadas de orden inferior. Una ecuación lineal de primer orden es, en su **forma canónica**:

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Se resuelve buscando un factor integrante que dependa solo de x, que resulta ser $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int P(x)\,dx}$.

La solución general queda:

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right].$$

***Ejemplo* 11.** $xy' - 4y = x^3$ es lineal con forma canónica $y' - \frac{4}{x}\,y = x^2$, su solución es para $C \in \mathbb{R}$:

$$y = \mathrm{e}^{\int \frac{4}{x}\,dx}\left[\int x^2\mathrm{e}^{-\int \frac{4}{x}\,dx}dx + C\right] = x^4\left[\int x^{-2}dx + C\right] = -x^3 + Cx^4.$$

1.3 Otros tipos de ecuaciones

1.3.1 Ecuaciones de Bernoulli

Son las que pueden escribirse de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \qquad n \neq 0, 1.$$

Se resuelven con el **cambio de variable** $z = y^{1-n}$, que las transforma en una ecuación lineal para $z(x)$.

***Ejemplo* 12.** $x^2y' + xy = x^3y^3$ es de Bernoulli con $n = 3$:

$$z = y^{-2} \Longrightarrow z' = -2y^{-3}y' \Longrightarrow y' = -\frac{y^3z'}{2};$$

sustituimos en la ecuación y simplificamos:

$$-\frac{y^3z'}{2}x^2 + xy = x^3y^3 \Longrightarrow z' - \frac{2}{x}z = 2x;$$

resolvemos como ecuación lineal y deshacemos el cambio:

$$z = \mathrm{e}^{\int \frac{2}{x}\,dx}\left[\int 2x\mathrm{e}^{-\int \frac{2}{x}\,dx}dx + C\right] = x^2\left[\int \frac{2}{x}\,dx + C\right] = x^2(\log(x^2) + C)$$

$$\Longrightarrow y = \frac{\pm 1}{x\sqrt{\log(x^2) + C}}.$$

1.3.2 Ecuaciones de Riccati

Tienen la forma

$$y' = A(x) + B(x)\, y + C(x)\, y^2.$$

Si conocemos una solución particular de la ecuación, $y_1(x)$, (dada ya u obtenida por algún otro método) la solución general puede escribirse como $y = y_1 + z$, donde z es solución de una ecuación de Bernoulli:

$$\begin{aligned}
&y_1' + z' = A + B(y_1 + z) + C(y_1 + z)^2 \implies \\
&y_1' + z' = A + By_1 + Bz + Cy_1^2 + 2Cy_1z + Cz^2 \implies \\
&z' = (B + 2Cy_1)z + Cz^2.
\end{aligned}$$

1.3.3 Reducción de orden

Exisen ecuaciones de segundo orden $F(x, y, y', y'') = 0$ especiales que se pueden resolver con técnicas de primer orden.

Caso 1. Si no aparece la variable y: La ecuación de segundo orden $F(x, y', y'') = 0$ se transforma en una ecuación de primer orden con el cambio de variable $y'(x) = p(x)$, que implica $y''(x) = p'(x)$, quedando la ecuación en (x, p),

$$F(x, p, p') = 0.$$

Caso 2. Si no aparece la variable x: La ecuación de segundo orden $F(y, y', y'') = 0$ se transforma en una ecuación de primer orden con el cambio de variable

$$y'(x) = p(y) \quad \rightsquigarrow \quad y''(x) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}\ ,$$

quedando la ecuación en (y, p),

$$F(y, p, pp') = 0.$$

Se pueden utilizar estos métodos también para reducir el orden en ecuaciones de orden más alto.

***Ejemplo* 13.** En el problema

$$\begin{cases} y'' = y'\mathrm{e}^y, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

no hay x; con el cambio $y' = p(y)$ queda:

$$\begin{cases} pp' = p\mathrm{e}^y, \\ p(0) = 1. \end{cases}$$

La ecuación implica $p = 0$ o $p' = \mathrm{e}^y$. La primera no verifica el dato; de la segunda se tiene $p = \mathrm{e}^y + C$, donde el dato implica $C = 0$. Volvemos a integrar, pues $p = y'(x)$,

$$\mathrm{e}^{-y} dy = dx \implies -\mathrm{e}^{-y} = x + D.$$

Con el dato $y(0) = 0$ se tiene que $y = -\log(1 - x)$.

1.4 Aplicaciones

1.4.1 Trayectorias ortogonales

Dos familias de curvas son ortogonales si la intersección de dos curvas cualesquiera, una de cada familia, es ortogonal. El problema entonces es, dada una familia de curvas, encontrar el conjunto de las **trayectorias ortogonales**. Si las EDO de dos familias de curvas son

$$y' = f(x, y), \qquad y' = g(x, y),$$

las familias son ortogonales si $fg = -1$. Por tanto, la familia de trayectorias ortogonales a la familia de EDO $y' = f(x, y)$ cumple la ecuación

$$y' = \frac{-1}{f(x, y)}.$$

***Ejemplo* 14.** La ecuación diferencial de la familia $x^2 + y^2 = 2cx$ es

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy},$$

luego sus trayectorias ortogonales tienen ecuación

$$y' = \frac{-2xy}{y^2 - x^2},$$

que es homogénea y tiene por solución: $x^2 + y^2 = Ky$.

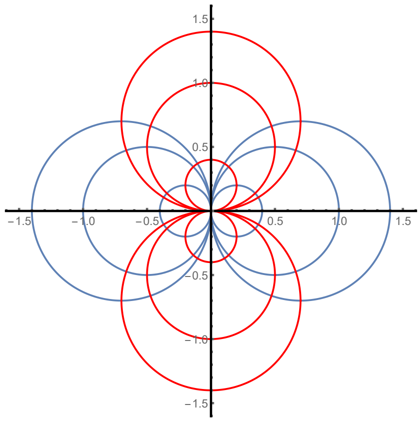

Figura 1.1: Las familias ortogonales de curvas del ejemplo 14.

1.4.2 Ley de enfriamiento de Newton

Hemos visto que la EDO que rige la variación de temperaturas de un cuerpo en un medio ambiente es

$$T'(t) = -k(T - T_m),$$

Separando variables, la solución de esa ecuación con el dato inicial $T(0) = T_0$ es:

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)\mathrm{e}^{-Kt}.$$

Si la temperatura inicial es menor (mayor) que la temperatura ambiente, la temperatura crecerá (decrecerá) acercándose a la temperatura ambiente de manera asintótica.

1.4.3 Desintegración radiactiva

Consiste en la transformación de átomos inestables (radio, uranio, cesio,...) en otro tipo de átomos. Aproximadamente la velocidad de desintegración de la sustancia es proporcional a la cantidad de sustancia radiactiva existente. La EDO para la tasa de **desintegraciones por minuto** es

$$d'(t) = -kd(t).$$

El método de datación de objetos antiguos se basa en determinar la tasa de desintegración de ciertas sustancias comparándola con la tasa de desintegración inicial, utilizando isótopos radiactivos de desintegración lenta. Si se conoce la **semivida** σ, es decir, el tiempo necesario para reducir la tasa de desintegración a la mitad, se obtiene

$$d(t) = d(0)2^{-t/\sigma},$$

de donde se puede calcular $T = \sigma \log_2(d(0)/d(T))$ a partir del dato $d(T)$.

1.4.4 Dinámica de poblaciones

La ley malthusiana de crecimiento demográfico establece la EDO para la población existente en cada tiempo

$$P'(t) = aP - bP^2,$$

a partir de una población inicial, $P(0) = P_0$. Esta ecuación se puede resolver separando variables o como ecuación de Bernoulli. La solución es

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)\mathrm{e}^{-at}}.$$

Se obtiene que la población crece si $a - bP_0 > 0$, y decrece en caso contrario, y que la población de equilibrio a largo plazo es

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{a}{b}.$$

Se podrían haber obtenido estas propiedades directamente de la ecuación, pues $P'(t) = 0$ implica $P(t) = 0$ o $P(t) = a/b$, y que $P'(t) > 0$ si y solo si $a - bP(t) > 0$, es decir, cuando $P(t) < a/b$.

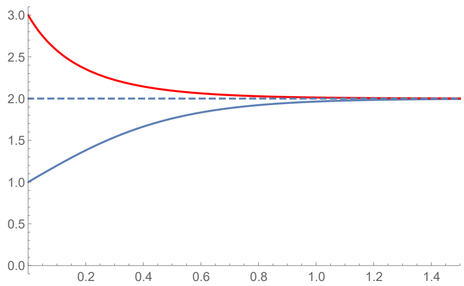

Figura 1.2: Dinámica de la población dependiendo de la población inical.

– $\mathcal{A}_\delta$P–

– $\mathcal{ERC}$–

CC BY NC SA