uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Apuntes

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 2

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M

http://ocw.uc3m.es/matematicas

2

ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

Presentamos aquí métodos de resolución para las ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor que uno, incluyendo los casos de coeficientes constantes y variables, junto con varias aplicaciones.

Contenido

2.1 Ecuaciones lineales de segundo orden

La **ecuación completa** de segundo orden tiene la forma general

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = R(x).$$

Estudiaremos el caso específico en que P y Q son constantes y algunos ejemplos de funciones variables, aunque no existe fórmula en general para resolver estas últimas. La ecuación posee dos derivadas, luego la solución general contendrá dos constantes. Decimos que la ecuación es **homogénea** si $R(x) = 0$.

Teorema 2.1.

Si $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ e y_0, y'_0 son números dados, la ecuación

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = R(x)$$

tiene una y sólo una solución $y(x)$ en $[a, b]$ tal que

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0\,.$$

Si los datos corresponden a puntos distintos no se aplica este teorema.

***Ejemplo* 15.** El siguiente problema

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \end{cases}$$

no tiene solución, mientras que el problema

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \end{cases}$$

tiene infinitas, $y(x) = k \operatorname{sen} x$, $k \in \mathbb{R}$.

Toda ecuación homogénea tiene siempre la solución trivial, $y = 0$. Además:

Teorema 2.2.

Si y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación homogénea, entonces también lo es:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

El conjunto de soluciones de una EDO de segundo orden homogénea es un espacio vectorial de dimensión 2. Así pues, dos soluciones linealmente independientes, esto es, que no son múltiplo una de otra, formarán base de ese espacio.

Teorema 2.3.

Si y_1 e y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

en un cierto intervalo $[a, b]$, entonces la solución general en ese intervalo es

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = R(x)\,,$$

la solución general de esa ecuación es:

$$y = y_p + y_h = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Para determinar la independencia lineal de dos funciones y_1, y_2, utilizamos el **wronskiano**, que es el determinante:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Lema 2.4. *Dos funciones son linealmente dependientes si y sólo si su wronskiano es cero. Además, si son soluciones de la ecuación homogénea $y'' + Py' + Qy = 0$, entonces $W = c\mathrm{e}^{-\int P}$ para alguna constante $c \in \mathbb{R}$.*

Si solo tenemos una solución de la ecuación homogénea, podemos hallar otra linealmente independiente mediante:

Lema 2.5. *(Fórmula de Abel)*

Si y_1 es solución de $y'' + Py' + Qy = 0$, una solución linealmente independiente con y_1 es $y_2 = vy_1$, donde

$$v(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)}\, \mathrm{e}^{-\int P(x)dx} dx.$$

2.1.1 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Son del tipo

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

Buscando soluciones en la forma $y = \mathrm{e}^{rx}$, sustituimos y tenemos que r es raíz del llamado **polinomio característico**:

$$r^2 + pr + q = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Nos encontramos con tres escenarios:

1. **Raíces reales distintas.** Si $p^2 - 4q > 0$, y r_1, r_2 son las raíces, las soluciones son $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$, que son independientes. La solución general es:
$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{r_1 x} + c_2\mathrm{e}^{r_2 x}.$$

2. **Raíces complejas conjugadas.** Si $p^2 - 4q < 0$, las raíces son $r_1 = a + ib$, $r_2 = a - ib$ y las soluciones asociadas son
$$\mathrm{e}^{(a+ib)x} = \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx), \qquad \mathrm{e}^{(a-ib)x} = \mathrm{e}^{ax}(\cos bx - i \operatorname{sen} bx).$$
Para obtener funciones reales consideramos en su lugar combinaciones lineales suyas que nos dan las partes real e imaginaria:
$$\mathrm{e}^{ax}\cos bx = \frac{\mathrm{e}^{(a+ib)x} + \mathrm{e}^{(a-ib)x}}{2}, \qquad \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen} bx = \frac{\mathrm{e}^{(a+ib)x} - \mathrm{e}^{(a-ib)x}}{2i}.$$
Estas son soluciones linealmente independientes. La solución general queda:
$$y(x) = \mathrm{e}^{ax}(c_1\cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx).$$

3. **Raíces reales iguales.** Cuando $p^2 - 4q = 0$ solo obtenemos una solución, $y_1(x) = \mathrm{e}^{-px/2}$, pero una segunda solución independiente es $y_2(x) = x\mathrm{e}^{-px/2}$. La solución general es:
$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^{-px/2}.$$

***Ejemplo* 16.** En $y'' + 4y' + 4y = 0$, el polinomio característico es $r^2 + 4r + 4 = 0$, con raíz doble $r = -2$, la solución es:
$$y = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

2.1.2 Método de los coeficientes indeterminados

Este método permite buscar soluciones particulares a las ecuaciones no homogéneas cuando el término independiente $R(x)$ tiene una forma especial: es una exponencial, seno o coseno, o estas funciones multiplicadas por un polinomio.

1. **Si** $R(x) = \mathrm{e}^{ax}$, tomamos $y_p(x) = A\mathrm{e}^{ax}$ si a no es raíz del polinomio característico (pues en ese caso es solución de la homogénea). Si lo es, tomamos $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{ax}$. Si esta es también solución de la homogénea tomamos entonces $y_p(x) = Ax^2\mathrm{e}^{ax}$.

2. **Si** $R(x) = K_1 \operatorname{sen} bx + K_2 \cos bx$, con K_1, K_2 constantes, consideramos

$$y_p(x) = A \operatorname{sen} bx + B \cos bx$$

si ib no es raíz del polinomio característico, en cuyo caso tomaríamos

$$y_p(x) = x(A \operatorname{sen} bx + B \cos bx).$$

3. **Si** $R(x)$ **es un polinomio de grado** n, tomamos un polinomio de grado n:

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n.$$

4. **Si** $R(x)$ es una exponencial o un seno o coseno, multiplicado por un polinomio, buscamos la solución particular en la misma forma, con las ideas anteriores.

5. **Si** $R(x)$ es suma de funciones de estos tipos, por linealidad buscamos una solución particular como suma de funciones en la forma descrita.

***Ejemplo* 17.** La ecuación $y'' - y' - 6y = 12x + 20\mathrm{e}^{-2x}$ tiene como soluciones del polinomio característico $r_1 = 3$, $r_2 = -2$; por tanto buscamos una solución particular en la forma $y_p(x) = Ax + B + Cx\mathrm{e}^{-2x}$, obteniendo $A = -2$, $B = 1/3$, $C = -4$. La solución general será entonces

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-2x}(c_2 - 4x) - 2x + 1/3.$$

2.1.3 Método de variación de los parámetros

Es más amplio que el anterior y se aplica incluso cuando los coeficientes no son constantes o la forma del término independiente $R(x)$ no es de los casos descritos anteriormente.

Proposición 2.6. *Una solución particular de la ecuación*

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = R(x)$$

se puede obtener con la expresión

$$y_p(x) = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x)\,,$$

donde y_1 e y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada, y los coeficientes vienen dados por

$$v_1(x) = \int \frac{-y_2(x) R(x)}{W(x)}\, dx\,, \qquad v_2(x) = \int \frac{y_1(x) R(x)}{W(x)}\, dx\,,$$

donde W es el wronskiano de y_1 e y_2.

La solución particular obtenida es

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)}{W(s)} R(s)\, ds.$$

En el cálculo de v_1 y v_2 no es necesario incluir constantes.

***Ejemplo* 18.** La ecuación $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x} \log x$ tiene como soluciones del polinomio característico $r = -1$ doble, es decir $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $y_2(x) = x\mathrm{e}^{-x}$. El wronskiano es $W(x) = \mathrm{e}^{-2x}$; por tanto buscamos una solución particular en la forma $y_p(x) = v_1(x)\mathrm{e}^{-x} + v_2(x)x\mathrm{e}^{-x}$, donde

$$v_1(x) = -\int \frac{x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-x} \log x}{\mathrm{e}^{-2x}}\, dx = x^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log x \right),$$

$$v_2(x) = \int \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-x} \log x}{\mathrm{e}^{-2x}}\, dx = x(\log x - 1).$$

Finalmente la solución particular buscada es

$$y_p(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x} \left(\frac{1}{2} \log x - \frac{3}{4} \right).$$

2.2 Ecuaciones lineales de orden n

Tienen la forma:

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = R(x),$$

donde $P_1, \ldots, P_n, R$ son funciones de x. Las ecuaciones se llaman **homogéneas** cuando $R(x) = 0$. Al tener n derivadas el espacio de soluciones es de dimensión n. Igual que con las ecuaciones de grado dos la solución será:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea (que tendrá n constantes) e y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea.

2.2.1 Coeficientes constantes

Consideremos

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = R(x), \qquad a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}.$$

Las soluciones particulares de la ecuación general se buscan como antes. Resolvemos la homogénea buscando soluciones $y = \mathrm{e}^{rx}$ como con el grado dos, obteniendo el **polinomio característico**:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

1. **Si hay n raíces distintas**, $r_1, \ldots, r_n$, la solución es:

$$y_h(x) = c_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{r_2 x} + \cdots c_n \mathrm{e}^{r_n x}.$$

2. **Si una raíz es múltiple**, por ejemplo si r_1 tiene multiplicidad k, las soluciones asociadas son:

$$(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}) \mathrm{e}^{r_1 x}.$$

   Hacemos esto con cada raíz múltiple.

3. **Raíces complejas conjugadas**: Si son simples, $a \pm bi$ dan lugar a las soluciones:

$$\mathrm{e}^{ax}(A \cos bx + B \operatorname{sen} bx).$$

   Si son múltilples, con multiplicidad k, dan lugar a las soluciones:

$$\mathrm{e}^{ax}[(A_1 + A_2 x + \cdots + A_k x^{k-1}) \cos bx + (B_1 + B_2 x + \cdots + B_k x^{k-1}) \operatorname{sen} bx].$$

***Ejemplo* 19.** La ecuación $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$, tiene polinomio característico con soluciones $r_1 = 1$ doble, $r_{3,4} = \pm i$. La solución general es

$$y(x) = \mathrm{e}^x (c_1 + c_2 x) + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x.$$

2.2.2 Ecuación equidimensional de Euler

Tiene la forma general

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0,$$

donde se observa que todos los términos tienen la misma dimensión. Buscamos soluciones de la forma $y = x^r$. Recordemos que si r es complejo, $r = a \pm bi$, se tiene $y = x^a (c_1 \cos(b \log x) + c_2 \operatorname{sen}(b \log x))$. Si hay raíces r múltiples buscamos soluciones en la forma $y = x^r \log x$.

Otro método: Se convierten en ecuaciones de coeficientes constantes con el cambio de variable

$$\begin{cases} y(x) = z(t), \\ x = \mathrm{e}^t, \end{cases} \Longrightarrow t = \log x, \quad y'(x) = z'(t)\frac{1}{x}, \quad y''(x) = \frac{1}{x^2}(z''(t) - z'(t)).$$

En general, la derivada $y^{(n)}$ tiene siempre el factor x^{-n}.

***Ejemplo* 20.** En la ecuación $x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = 0$, poniendo $y = x^k$ se tiene $k(k-1)(k-2) + 2k(k-1) + k - 1 = 0$, con raíces $k = 1$, $k = \pm i$. La solución general es

$$y(x) = c_1 x + c_2 \cos(\log x) + c_3 \operatorname{sen}(\log x).$$

Con el cambio de variables quedaría la ecuación $z''' - z'' + z' - z = 0$, cuya solución general es $z(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} t$. Al deshacer el cambio se obtiene la misma solución.

2.3 Aplicaciones

2.3.1 Circuitos eléctricos

Contamos con un generador, una resistencia, un alternador y un condensador en un circuito simple:

Q	$\rightsquigarrow$	carga eléctrica (coulombios)		
I	$\rightsquigarrow$	corriente eléctrica (amperios)	$\rightsquigarrow$	$I = Q'$
E	$\rightsquigarrow$	fuerza electromotriz (voltios)		
R	$\rightsquigarrow$	resistencia (ohmios)	$\rightsquigarrow$	$E_R = RI$
L	$\rightsquigarrow$	inductancia (henrios)	$\rightsquigarrow$	$E_L = LI'$
C	$\rightsquigarrow$	capacitancia (faradios)	$\rightsquigarrow$	$E_C = \frac{Q}{C}$.

Igualando la fuerza electromotriz producida por el generador con la caída producida por los otros tres elementos según la **ley de Kirchoff**, tenemos la ecuación,

$$LI' + RI + \frac{Q}{C} = E$$

que es equivalente a las ecuaciones de segundo orden para la carga o la intensidad de corriente eléctrica, llamadas ecuaciones LRC,

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E, \qquad LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'.$$

Según los datos iniciales, en carga o en corriente, se utiliza una u otra ecuación.

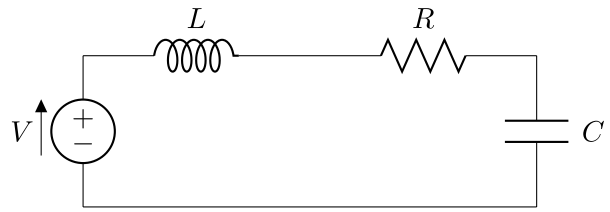

Figura 2.1: Circuito eléctrico básico.

2.3.2 Sistemas mecánicos

Estudiamos las vibraciones forzadas de un cuerpo sujeto a una pared mediante un muelle con rozamiento, consideramos:

x	$\rightsquigarrow$	desplazamiento
m	$\rightsquigarrow$	masa
c	$\rightsquigarrow$	rozamiento (fuerza/velocidad)
k	$\rightsquigarrow$	constante del muelle (fuerza/distancia)
F	$\rightsquigarrow$	fuerza exerior.

La **ley de Newton** junto con la **ley de Hooke** y el hecho de que la resistencia por rozamiento es proporcional a la velocidad, llevan a la ecuación

$$mx'' + cx' + kx = F.$$

El problema se completa fijando la posición y velocidad iniciales del cuerpo.

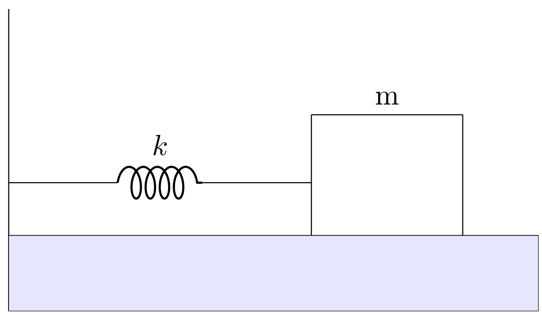

Figura 2.2: Un cuerpo sujeto a un muelle, que se desliza con rozamiento sobre una mesa.

La similitud entre ambos modelos es evidente:

$$x \leftrightarrow Q, \quad m \leftrightarrow L, \quad c \leftrightarrow R, \quad k \leftrightarrow \frac{1}{C}, \quad F \leftrightarrow E.$$

Dependiendo de la relación entre el rozamiento y la constante del muelle por la masa, en particular del signo de $c^2 - 4km$ (o análogamente la resistencia respecto de L/C en el circuito) se puede tener un sistema oscilante

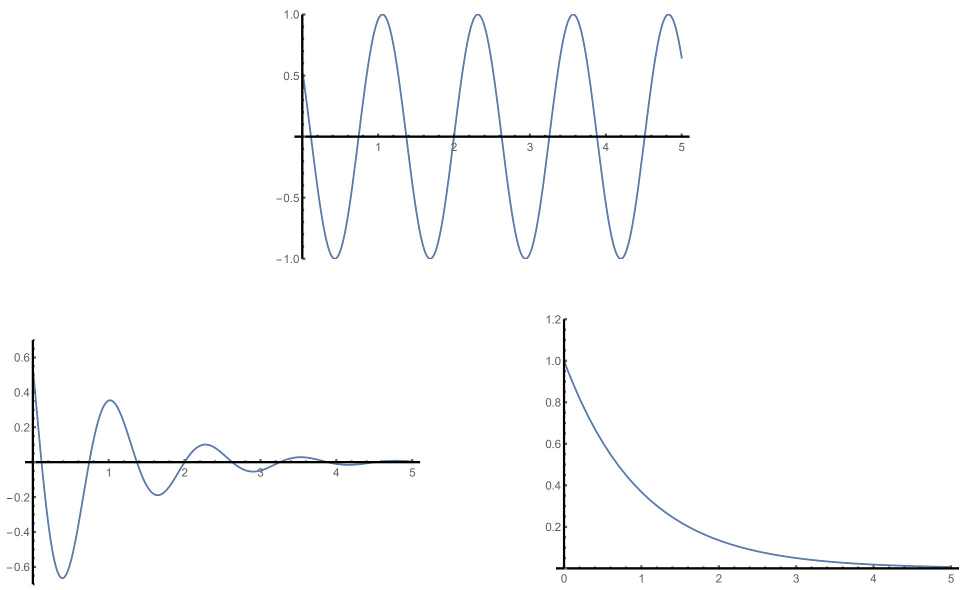

Figura 2.3: Ejemplos de sistemas mecánicos: oscilante ($c = 0$), subamortiguado (c pequeño), sobreamortiguado (c grande).

($c = 0$), oscilante con amortiguamiento ($0 < c < 2\sqrt{km}$) o monótono con sobreamortiguamiento ($c \geq 2\sqrt{km}$).

– $\mathcal{A}_\delta$P–

– $\mathcal{ERC}$–