uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Apuntes

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 3

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M

http://ocw.uc3m.es/matematicas

3

TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace es una herramienta que permite resolver un amplio espectro de problemas de ecuaciones diferenciales, integrales e incluso sistemas de ecuaciones, siempre lineales.

Contenido

3.1 Definición y propiedades básicas

Dada $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que tiene **crecimiento a lo sumo exponencial** si para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\lim_{t\to\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t} = 0.$$

En ese caso, si además f es integrable en cada intervalo $(0,N)$, podemos definir la **transformada de Laplace** de f para $s > \alpha$, como la integral

$$F(s) = L[f](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt\,.$$

Son de crecimiento exponencial, por ejemplo, los polinomios, seno, coseno y e^{kx}, no lo es por ejemplo e^{kx^2}. A lo largo de este tema las funciones a las que apliquemos la transformada de Laplace serán siempre integrables y de crecimiento a lo sumo exponencial. Supondremos también, cuando sea necesario, que se anulan en $(-\infty,0)$. Para que exista la transformada de Laplace no se requiere que la función esté definida en el origen (calcularemos por ejemplo la transformada de $f(x) = 1/\sqrt{x}$), pero en la mayoría de las aplicaciones necesitaremos usar el valor $f(0)$.

Proposición 3.1. *Dadas f y g definidas en $(0,\infty)$,*

1. $L[\alpha f + \beta g](s) = \alpha\, L[f](s) + \beta\, L[g](s), \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$
2. $L[f(t)](s) \to 0$ *cuando* $s \to \infty$.
3. $L[\mathrm{e}^{at} f(t)](s) = L[f](s-a), \qquad a \in \mathbb{R}.$
4. $L[f(at)](s) = \dfrac{1}{a}\, L[f(t)]\left(\dfrac{s}{a}\right), \qquad a > 0.$

Las derivadas resultan muy sencillas de tratar con esta transformación, por eso resulta una herramienta muy útil para las ecuaciones diferenciales, la limitación es que el problema tiene que estar definido en $(0,\infty)$, lo que se consigue fácilmente con una traslación.

Teorema 3.2.

1. *Si f es derivable en $(0,\infty)$ y existe $f(0)$, entonces*

$$L[f'](s) = s\, L[f](s) - f(0)\,.$$

2. *Si f es derivable dos veces en $(0,\infty)$ y existen $f(0)$ y $f'(0)$, entonces*

$$L[f''](s) = s^2\, L[f](s) - s\, f(0) - f'(0)\,.$$

3. *$L[f]$ es derivable y*

$$\frac{d}{ds}\left(L[f](s)\right) = -L[t\, f(t)](s)\,.$$

4. *$L[f]$ tiene derivadas de todos los órdenes y*

$$\frac{d^n}{ds^n}\left(L[f](s)\right) = (-1)^n L[t^n f(t)](s)\,.$$

Teorema 3.3.

$$L\left[\int_0^t f(x)\, dx\right](s) = \frac{1}{s}\, L[f](s)\,.$$

Teorema 3.4.

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty L[f(t)](u)\, du.$$

La mayoría de las transformadas de las funciones elementales se obtienen directamente integrando o aplicando alguna de las propiedades descritas. Necesitaremos también hacer uso de la **función gamma**, definida por:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Sus propiedades básicas son:

Proposición 3.5.

1. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$
3. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$
4. $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$

3.1.1 Listado de transformadas de Laplace

$f(t)$	$L[f](s)$	
1	$\dfrac{1}{s}$,	$s>0,$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$,	$s>0,\ n\in\mathbb{N},$
t^a	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$,	$s>0,\ a>-1,$
e^{at} ,	$\dfrac{1}{s-a}$,	$s>a,$
$\operatorname{sen}(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$,	$s>0,$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$,	$s>0,$
$\dfrac{\operatorname{sen}(at)}{t}$	$\arctan\dfrac{a}{s}$,	$s>0,$
$e^{at}t^b$	$\dfrac{\Gamma(b+1)}{(s-a)^{b+1}}$,	$s>a,\ b>-1,$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$,	$s>a,$
$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$,	$s>a,$
$\operatorname{senh}(at)=\dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$,	$s>a,$
$\cosh(at)=\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}$,	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$,	$s>a,$

3.2 Resolución de ecuaciones y sistemas lineales

Transformando por Laplace una ecuación diferencial para la función $y(x)$, junto con los datos iniciales, la convertimos en una ecuación algebraica para la función $L[y](s)$, que podemos resolver. Deshacemos entonces la transformada de Laplace con la **antitransformada de Laplace**, que nos devuelve la función original si la función es continua, es decir:

$$L[f](s) = L[g](s) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x),$$

si f y g son continuas. No utilizaremos una fórmula sino que la obtendremos descomponiendo la transformada de Laplace como suma de fracciones simples, que podemos identificar con transformadas de funciones conocidas utilizando las propiedades vistas anteriormente.

***Ejemplo* 21.**

$$\begin{cases} y'' + 4y = 4x \\ y(0) = 1,\, y'(0) = 5 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = \frac{4}{s^2}\,.$$

donde $Y = L[y]$. Despejamos $Y(s)$, descomponemos y antitransformamos:

$$Y(s) = \frac{4 + s^3 + 5s^2}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2} + \frac{s+4}{s^2+4} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = x + \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x.$$

El mismo procedimiento se utiliza para resolver **sistemas lineales** de ecuaciones diferenciales. El tipo más sencillo es el de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c(t), \\ y' = dx + ey + f(t). \end{cases}$$

donde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son las funciones incógnitas, a, b, d, e son constantes y $c(t), f(t)$ son funciones de t. Un sistema de dos ecuaciones diferenciales de grado uno es equivalente a una ecuación diferencial lineal de grado dos y al revés.

Al transformar por Laplace un sistema diferencial obtenemos un sistema algebraico, con las variables $L[x](s)$ y $L[y](s)$, que podemos resolver utilizando cualquier método algebraico como sustitución, el método de Gauss o el de Cramer. Al final antitransformamos para hallar la solución, $x(t), y(t)$.

***Ejemplo* 22.** El sistema

$$\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 2x + y, \\ x(0) = 0,\, y(0) = 1, \end{cases}$$

se transforma, poniendo $X = L[x]$, $Y = L[y]$, en

$$\begin{cases} sX = 4X - Y, \\ sY - 1 = 2X + Y. \end{cases}$$

Despejando por ejemplo X obtenemos $X(s) = \dfrac{-1}{s^2 - 5s + 6}$, cuya transformada inversa es $x(t) = -e^{3t} + e^{2t}$. Para obtener $y(t)$ usamos la primera ecuación del sistema original, $y(t) = 4x(t) - x'(t) = -e^{3t} + 2e^{2t}$.

3.3 Propiedades avanzadas

3.3.1 Convolución

La **convolución** de dos funciones f y g es la operación:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

con f y g suficientemente regulares para que exista la integral. Como las funciones que nos interesan en este capítulo se anulan en $(-\infty, 0)$, podemos escribir

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

Teorema 3.6.

$$L[f * g](s) = L[f](s)\, L[g](s)\,.$$

Podemos ahora antitransformar muchas más expresiones y además resolver algunas **ecuaciones integrales**, donde aparecen integrales de la función incógnita, o **ecuaciones integro-diferenciales**, donde aparecen tanto derivadas como integrales de la incógnita.

***Ejemplo* 23.** La **ecuación integral de Volterra**,

$$y(x) + \int_0^x K(x-t)y(t)dt = f(x), \quad x > 0,$$

donde f y K son funciones dadas, se resuelve como sigue:

$$L[y](s) + L[K * y](s) = L[f](s) \quad \Longrightarrow \quad L[y](s) = \frac{L[f](s)}{1 + L[K](s)}.$$

Finalmente se antitransforma.

3.3.2 Función de salto

Para operar con funciones definidas a trozos utilizamos la **función de salto** o **función de Heaviside**, definida por:

$$H(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geq 0\,,\end{cases}$$

Usaremos la transformada de Laplace de una función trasladada y cortada.

Teorema 3.7.

Si $a\geq 0$ se tiene

$$L[f(t-a)H(t-a)](s)=\mathrm{e}^{-as}L[f(t)](s)\,.$$

En particular $L[H(t-a)](s)=\mathrm{e}^{-as}/s$. Para calcular la transformada de Laplace de una función definida a trozos debemos escribirla en términos de la función H:

***Ejemplo* 24.**

$$\begin{aligned} f(t)=\begin{cases}3t, & 0\leq t<1\\ t^2, & t\geq 1\end{cases} &= \begin{cases}3t, & 0\leq t<1\\ 3t+t^2-3t, & t\geq 1\end{cases}\\ &= \begin{cases}3t, & 0\leq t<1\\ 3t+(t-1)^2-(t-1)-2, & t\geq 1\end{cases}\\ &= 3t+H(t-1)\left((t-1)^2-(t-1)-2\right).\end{aligned}$$

$$L[f(t)](s)=\frac{3}{s^2}+\mathrm{e}^{-s}\left(\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s}\right).$$

3.3.3 Delta de Dirac

Llamamos **delta de Dirac**, $\delta(t)$, al límite:

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}f_\varepsilon(t),\qquad \text{donde}\quad f_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\leq t\leq\varepsilon,\\ 0, & t>\varepsilon.\end{cases}$$

Se la llama **"función" impulso** como abuso de notación en algunos textos pero la delta **no es** una función, por eso sus propiedades son sorprendentes:

Proposición 3.8.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \delta(t)dt=1.$

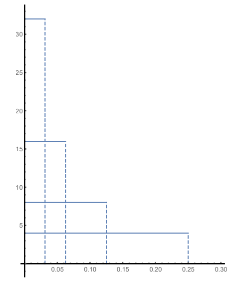

Figura 3.1: Aproximación a la *delta de Dirac*.

2. $\displaystyle\int_0^\infty \delta(t-a)f(t)dx = f(a)$, *si* f *es continua,* $a \geq 0$.

3. $H(x-a) = \displaystyle\int_0^x \delta(t-a)dt$.

4. $f * \delta(t) = f(t)$, *si* f *es continua.*

Teorema 3.9.

Si $a \geq 0$ *se tiene*

$$L[\delta(t-a)](s) = \mathrm{e}^{-as}.$$

Este resultado, o la propiedad 3 anterior, se pueden interpretar diciendo que la delta de Dirac es la derivada, en algún sentido, de la función de salto.

Si en una ecuación diferencial hay una delta, corresponde a la derivada más alta, para que la ecuación tenga sentido. Así, si y'' tiene una delta, y' tendrá un salto e y será continua, pero con un pico.

***Ejemplo* 25.**

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + y = 1 + \delta(t-1), \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{array}\right. \quad \Longrightarrow (s^2+1)L[y](s) = s + \frac{1}{s} + \mathrm{e}^{-s}$$

$$\Longrightarrow L[y](s) = \frac{1}{s} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2+1}$$

$$\Longrightarrow y(t) = 1 + \operatorname{sen}(t-1)H(t-1)$$

$$\Longrightarrow y(t) = \left\{\begin{array}{ll} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 1 + \operatorname{sen}(t-1), & t \geq 1. \end{array}\right.$$

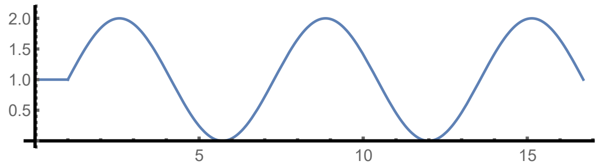

Figura 3.2: Solución del Ejemplo 25.

3.3.4 Resumen de propiedades de la transformada de Laplace

Las propiedades que hemos visto a lo largo del tema, incluidas las propiedades avanzadas, se pueden resumir en la siguiente tabla, donde $F = L[f]$, $G = L[g]$, $W = L[w]$.

$f(t)$	$F(s)$
$f(t) = \mathrm{e}^{at}g(t)$	$G(s-a),\ s>a$
$f(t) = g(at)$	$\dfrac{1}{a}G\left(\dfrac{s}{a}\right)$
$f(t) = g'(t)$	$sG(s) - g(0)$
$f(t) = g''(t)$	$s^2G(s) - sg(0) - g'(0)$
$f(t) = tg(t)$	$-G'(s)$
$f(t) = t^n g(t)$	$(-1)^n G^{n)}(s)$
$f(t) = \displaystyle\int_0^t g(x)\,dx$	$\dfrac{1}{s}G(s)$
$f(t) = \dfrac{g(t)}{t}$	$\displaystyle\int_s^\infty G(\tau)\,d\tau$
$f(t) = g * w(t)$	$G(s)W(s)$
$f(t) = H(t-a)g(t-a)$	$\mathrm{e}^{-as}G(s)$
$f(t) = \delta(t-a)$	e^{-as}

– $\mathcal{A}_\delta$P–
– $\mathcal{ERC}$–