

uc3m

Universidad **Carlos III** de Madrid

Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Apuntes

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 4

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M

<http://ocw.uc3m.es/matematicas>



4

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES EN EDPs

Con este tema damos el salto cualitativo de pasar a resolver ecuaciones en derivadas parciales, EDPs. Como herramienta necesaria estudiaremos también las series de Fourier.

Contenido

4.1. Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales	37
4.1.1. Definiciones	37
4.1.2. Ecuaciones fundamentales	38
4.1.3. Simplificaciones	40
4.2. Método de separación de variables	41
4.2.1. Procedimiento general	41
4.2.2. La ecuación del calor en una varilla con temperatura cero en los extremos	42
4.3. Series de Fourier	44
4.3.1. Introducción	44
4.3.2. Series de Fourier de senos	46
4.3.3. Series de Fourier de cosenos	47
4.3.4. Continuidad de las series de Fourier	48
4.3.5. Otras propiedades de las series de Fourier	49
4.4. Otros ejemplos de separación de variables	51
4.4.1. La ecuación del calor en una varilla con extremos aislados	51
4.4.2. Ecuación de Laplace en un disco	52

4.1 Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales

4.1.1 Definiciones

Una **ecuación en derivadas parciales (EDP)** es una relación entre una función de varias variables $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y sus derivadas parciales, es decir una expresión del tipo

$$F\left(\vec{x}, u(\vec{x}), \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) = 0,$$

(solo estudiaremos ecuaciones de segundo orden). La solución, si existe, puede contener funciones arbitrarias y necesitaremos datos para poderlas calcular.

Ejemplo 26. Para cualquier función f :

$$u = yf(x) \quad \text{es solución de} \quad y \frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

En muchos ejemplos una de las variables es el tiempo y el resto son variables espaciales, $u : \Omega \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, ($N = n + 1$ en ese caso). Decimos entonces que se trata de una ecuación de evolución. Ecuaciones que no dependen del tiempo se suelen llamar estacionarias, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $N = n$. Llamamos **problema** en EDP a una ecuación junto con sus datos, que llamamos **condiciones iniciales (CI)** si son datos para el tiempo $t = 0$ en las ecuaciones de evolución, o **condiciones de contorno (CC)**, si son datos en la frontera del dominio espacial $\partial\Omega$. Estas últimas pueden ser de diferentes tipos:

1. **Condiciones Dirichlet:** Conocemos u en la frontera del dominio: $u = g$ en $\partial\Omega$, habitualmente $g = 0$.
2. **Condiciones Neumann:** Conocemos la derivada normal de u , es decir el **flujo**, en $\partial\Omega$, habitualmente es flujo cero:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} = g \quad \text{en} \quad \partial\Omega,$$

donde $\vec{\nu}$ es el vector normal exterior a $\partial\Omega$.

3. **Condiciones mixtas:** Aparecen u y alguna de sus derivadas en la misma condición en la frontera. Por ejemplo

$$au + b \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{en} \quad \partial\Omega.$$

Estudiaremos solo **ecuaciones lineales**

$$Lu = f,$$

donde L es un **operador lineal**, es decir verifica

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v), \quad \forall \alpha, \beta \text{ constantes.}$$

Esto significa que $L(u)$ es una combinación lineal de u y sus derivadas:

$$L = \sum_{i=1}^n a_i(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n b_{i,j}(\vec{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Decimos que la EDP es **homogénea** si $f = 0$.

Denominaremos **solución de equilibrio** de un problema que depende del tiempo a una solución que es independiente del tiempo. Esperamos usualmente que la solución de equilibrio sea el límite de la solución del problema cuando $t \rightarrow \infty$.

4.1.2 Ecuaciones fundamentales

Los ejemplos más importantes de operadores en la física matemática son:

$$L = \Delta, \quad L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta,$$

que darán lugar como veremos a las ecuaciones de Laplace, calor y ondas. El primero se aplica a funciones $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, esto es $u = u(\vec{x})$. Los dos últimos se aplican a $u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, esto es $u = u(\vec{x}, t)$, con $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, y son operadores de evolución, pues como hemos dicho usualmente la variable t denota tiempo. En las tres ecuaciones aparece el operador **laplaciano** que es el operador diferencial por excelencia:

$$\Delta = \operatorname{div} \nabla = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (= \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 \text{ en su notación física}).$$

Estos operadores dan lugar a las ecuaciones fundamentales en EDP, pues todas las EDP lineales de segundo orden se clasifican según los coeficientes de los términos de grado dos del operador. En dimensión dos, la ecuación

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \text{términos de grado menor}$$

involucra un operador que es de uno de los tipos anteriores. De hecho, siempre existe un cambio de variable sencillo que lo reduce a uno de ellos según el signo del discriminante $D = B^2 - 4AC$, y la ecuación asociada recibirá las siguientes denominaciones:

1. **Parabólica** si $D = 0$, con prototipo la **ecuación del calor**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

Esta ecuación estudia la distribución de temperaturas $u(\vec{x}, t)$ en un cuerpo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a lo largo del tiempo. Los datos físicos necesarios son la distribución inicial de temperaturas y alguna condición sobre la frontera del dominio, por ejemplo temperatura nula o aislamiento, que se describen mediante:

$$\begin{array}{llll} \text{temperatura nula} & \rightsquigarrow & u = 0 & \text{en } \partial\Omega \rightsquigarrow \text{cond. Dirichlet,} \\ \text{aislamiento} & \rightsquigarrow & \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \rightsquigarrow \text{cond. Neumann.} \end{array}$$

La condición $u = 0$ en la frontera proviene de considerar como origen de temperaturas una temperatura fijada, la del entorno. La derivada normal exterior a $\partial\Omega$, es decir $\partial u / \partial \nu$, es el flujo de calor a través y hacia fuera de $\partial\Omega$; cuando es igual a cero no hay flujo de calor a través de la misma y así el cuerpo está aislado.

2. **Hiperbólica** si $D > 0$, y el prototipo es la **ecuación de ondas**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u.$$

Describe la vibración de una cuerda (de un violín por ejemplo, en dimensión $n = 1$), una membrana (un tambor, en $n = 2$) o la propagación de ondas en el espacio (acústicas o electromagnéticas, en $n = 3$). Los datos frontera más usuales en los dos primeros casos serán de tipo Dirichlet, es decir, la cuerda o la membrana están sujetas por los bordes. Además de la posición inicial de la cuerda o membrana hay que añadir como dato la velocidad inicial porque hay dos derivadas respecto al tiempo.

3. **Elíptica** si $D < 0$, con prototipo la **ecuación de Laplace**:

$$\Delta u = 0.$$

Esta ecuación describe la distribución estacionaria de temperaturas o la posición de equilibrio de una cuerda vibrante o una membrana. También aparece en multitud de otros problemas físicos o puramente matemáticos.

4.1.3 Simplificaciones

Los problemas lineales se pueden simplificar mucho en su resolución, haciendo necesario resolver solamente problemas homogéneos o con todas las condiciones de contorno homogéneas salvo una. Consideremos el problema:

$$(P) \quad \begin{cases} L(u) = f, & \text{en } \mathcal{D}, \\ B_j(u) = g_j, & \text{en } \Gamma_j, j = 1, \dots, k, \end{cases}$$

donde L es un operador lineal, $u : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ (donde N puede ser n o $n+1$), y B_j con $j = 1, \dots, k$ son condiciones de contorno o iniciales lineales en una parte de la frontera, $\Gamma_j \subset \partial\mathcal{D}$. Entonces:

1. Si v resuelve la ecuación, entonces $w = u - v$ resuelve el problema:

$$\begin{cases} L(w) = 0, & \text{en } \mathcal{D}, \\ B_j(w) = g_j - B_j(v), & \text{en } \Gamma_j, j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

2. Si v cumple los datos, entonces $w = u - v$ es solución del problema:

$$\begin{cases} L(w) = f - L(v), & \text{en } \mathcal{D}, \\ B_j(w) = 0, & \text{en } \Gamma_j, j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

3. **Principio de superposición:** Si $u_1, u_2, \dots, u_m$, $m \in \mathbb{N}$, son soluciones del problema homogéneo:

$$\begin{cases} L(u) = 0, & \text{en } \mathcal{D}, \\ B_j(u) = 0, & \text{en } \Gamma_j, j = 1, \dots, k, \end{cases}$$

entonces, $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m$, con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, también es solución.

4. Si u_0 resuelve la ecuación no homogénea con datos homogéneos y las funciones u_j , $j = 1, \dots, k$, resuelven la ecuación homogénea con solo el dato j -ésimo no homogéneo, respectivamente:

$$\begin{cases} L(u_0) = f, & \text{en } \mathcal{D}, \\ B_j(u_0) = 0, & \text{en } \Gamma_j, j = 1, \dots, k, \end{cases} \quad \begin{cases} L(u_j) = 0, & \text{en } \mathcal{D}, \\ B_j(u_j) = g_j, & \text{en } \Gamma_j, \\ B_i(u_j) = 0, & \text{en } \Gamma_i, i \neq j, \end{cases}$$

entonces una solución del problema (P) es

$$u = u_0 + u_1 + \dots + u_k.$$

4.2 Método de separación de variables

4.2.1 Procedimiento general

El método consiste en buscar soluciones en forma de variables separadas, es decir, como producto de funciones que dependan cada una de una variable distinta. En la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

buscamos soluciones de la forma $u(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x})T(t)$, y llegamos a

$$\varphi T' = T \Delta \varphi \implies \frac{T'}{T} = \frac{\Delta \varphi}{\varphi} = \text{constante},$$

pues cada miembro depende de una variable distinta. Denotaremos la constante por $-\lambda$ porque el signo simplificará cálculos posteriores.

Necesitamos tantos datos como derivadas hay en la ecuación y también los datos se tienen que separar en condiciones para cada una de esas funciones, por lo que preferimos los datos de contorno homogéneos. Solo resolveremos por este método problemas con un único dato no homogéneo, si hay más, separamos el problema en varios, utilizando el apartado anterior, aunque no siempre será posible. Podremos manejar varios datos no homogéneos si son datos iniciales.

El problema espacial:

$$\begin{cases} \Delta \varphi + \lambda \varphi = 0, \\ + \text{datos de contorno}, \end{cases}$$

es un **problema de autovalores**, pues permite calcular a la vez los valores (infinitos como veremos) de λ , que llamaremos **autovalores** y denotaremos por λ_k , y las correspondientes funciones φ , que llamaremos **autofunciones** φ_k . Conocidos los autovalores podemos resolver la ecuación temporal,

$$T' + \lambda T = 0 \implies T(t) = e^{-\lambda t},$$

y obtenemos una familia de soluciones en variables separadas:

$$u_k(\vec{x}, t) = e^{-\lambda_k t} \varphi_k(\vec{x}).$$

Por el principio de superposición cualquier combinación lineal de estas funciones es también solución. Por tanto, si el dato inicial es de la forma

$u(0, t) = \sum_{k=1}^M a_k \varphi_k(\vec{x})$, la solución entonces tendrá la expresión

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{k=1}^M a_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(\vec{x}).$$

La cuestión entonces es si cualquier función se puede expresar como una combinación lineal como la anterior, o en qué condiciones es cierto. Veamos qué pasa en dimensión $n = 1$.

4.2.2 La ecuación del calor en una varilla con temperatura cero en los extremos

El problema se describe mediante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, & t > 0, & \text{(CC Dirichlet)} \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L. & \text{(CI)} \end{cases}$$

Buscando soluciones en la forma $u(x, t) = \varphi(x)T(t)$, tenemos

$$\frac{T'}{kT} = \frac{\varphi''}{\varphi} = -\lambda,$$

donde λ es una constante arbitraria. Separamos también las condiciones:

$$\begin{cases} u(0, t) = \varphi(0)T(t) = 0 \quad \forall t & \implies \varphi(0) = 0, \\ u(L, t) = \varphi(L)T(t) = 0 \quad \forall t & \implies \varphi(L) = 0, \end{cases}$$

porque $T(t) \equiv 0$ daría $u(x, t) \equiv 0$, que no es una solución válida. Tenemos entonces:

Ecuación temporal: $T' = -\lambda k T \implies T(t) = e^{-k\lambda t}$.

Problema de autovalores:

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda \varphi = 0, & 0 < x < L, \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi(L) = 0. \end{cases}$$

Vamops a ver que solo para algunos valores de λ hay solución no trivial. Como el polinomio característico es $r^2 + \lambda = 0$ hay tres casos distintos:

Caso 1. $\lambda < 0 \implies r = \pm\sqrt{-\lambda}$, dos raíces reales distintas, luego para c_1, c_2 constantes arbitrarias:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \\ \varphi(0) = \varphi(L) &= 0 \implies c_1 = c_2 = 0 \implies \varphi(x) \equiv 0. \end{aligned}$$

Caso 2. $\lambda = 0 \implies r = 0$, raíz doble:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= c_1 + c_2 x, \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0 &\implies c_1 = c_2 = 0 \implies \varphi(x) \equiv 0.\end{aligned}$$

Caso 3. $\lambda > 0 \implies r = \pm i\sqrt{\lambda}$, raíces imaginarias puras:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) \\ \begin{cases} \varphi(0) = 0 \implies c_2 = 0, \\ \varphi(L) = 0 \implies c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0 \implies \begin{cases} c_1 = 0 \implies \varphi(x) \equiv 0, \\ \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0. \end{cases} \end{cases}\end{aligned}$$

La última condición implica $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$. Eso nos da los autovalores y autofunciones:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Hemos encontrado las soluciones en forma de producto

$$u_n(x, t) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por el principio de superposición (linealidad), cualquier combinación lineal también será solución. De hecho, si la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

converge “apropiadamente” también será solución de la ecuación del calor con condiciones de contorno cero.

La condición inicial se verificará si podemos encontrar coeficientes b_n de manera que el dato inicial se pueda escribir en la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta expresión es una **serie de Fourier de senos** y por el trabajo de J. Fourier sabemos que “cualquier” condición inicial $f(x)$ puede escribirse como una tal combinación lineal. Supongamos por el momento cierto el resultado, que se estudiará en la siguiente sección. Los números b_n se llaman **coeficientes de Fourier de $f(x)$** y podemos calcularlos usando las siguientes **relaciones de ortogonalidad**:

$$\int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L/2, & m = n, \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Fijando un $m \in \mathbb{N}$ multiplicamos a cada lado de la expresión de f por $\sin \frac{m\pi x}{L}$ e integramos en $[0, L]$. Obtenemos:

$$\int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{b_m L}{2}.$$

Por tanto

$$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx.$$

Finalmente, la solución de nuestro problema de conducción del calor es:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin \frac{n\pi y}{L} dy \right) e^{-k(n\pi/L)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L} \\ &= \int_0^L f(y) \left(\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \right) dy \\ &= \int_0^L f(y) G(x, y, t) dy. \end{aligned}$$

La función G se llama **función de Green** del problema.

Otros ejemplos se pueden estudiar modificando las condiciones en la frontera: flujo cero o condiciones mixtas. También se aplica el método en la ecuación de ondas y en la ecuación de Laplace, incluso en varias variables. La cuestión principal es resolver el problema de autovalores y caracterizar las relaciones de ortogonalidad.

4.3 Series de Fourier

4.3.1 Introducción

Estudiamos ahora las series que han aparecido en el método de separación de variables. La serie de la sección anterior es un caso particular de otras series más generales, que aparecen al resolver otros problemas de EDPs. Empezamos con una definición.

Para una función f en el intervalo $[-L, L]$, su **serie de Fourier** se define por:

$$S(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

donde las constantes a_n, b_n se llaman **coeficientes de Fourier** y se definen mediante:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

Estas fórmulas tienen sentido porque las funciones seno y coseno de la serie cumplen las **relaciones de ortogonalidad** siguientes:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n, \end{cases} & n, m \geq 1, \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \geq 1, \\ 2L & m = n = 0, \end{cases} & n, m \geq 0, \\ \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= 0, & n \geq 1, m \geq 0. \end{aligned}$$

Para que exista la serie de Fourier de una función f en $[-L, L]$ es decir, que estén bien definidos todos sus coeficientes, es necesario que:

$$\int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty.$$

Las cuestiones cruciales son ahora si esta serie converge y si converge a la función f . En primer lugar, la serie de Fourier de f en $[-L, L]$ es periódica de periodo $2L$ pero f no es necesariamente periódica, por eso consideramos la **extensión periódica** de f con periodo $2L$, que habitualmente seguimos denotando por f :

$$f(x + 2KL) = f(x), \quad \forall K \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in (-L, L].$$

La serie de Fourier de f puede ser diferente de la función y no está claro si es convergente o no, por eso la notación que empleamos es:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

que significa que la parte derecha es la serie de Fourier de f . Necesitamos definir algunos conceptos antes de continuar:

Una función f es C^1 **a trozos** o **suave a trozos** en $(-L, L)$ si el intervalo se puede partir en subintervalos tales que f y f' son ambas continuas en cada subintervalo abierto y existen los límites laterales en los extremos, es decir, f y f' pueden tener **discontinuidades de salto** en los extremos de los subintervalos.

TEOREMA 4.1. (*Convergencia de series de Fourier*)

Si f es C^1 a trozos en $(-L, L)$, entonces la serie de Fourier de f converge a la extensión periódica de f donde esa extensión periódica es continua y a la media de los dos límites

$$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)),$$

donde la extensión periódica tiene un salto, siendo

$$f(x^+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t), \quad f(x^-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t).$$

Casos especiales son las series de Fourier de senos y las series de Fourier de cosenos, que estudiamos a continuación.

4.3.2 Series de Fourier de senos

La simetría puede simplificar los cálculos de la serie de Fourier para algunas funciones. Si tenemos una función **impar** (esto es $f(-x) = -f(x)$) entonces $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$, luego:

PROPOSICIÓN 4.2. *La serie de Fourier de una función impar es una serie de senos:*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

donde los coeficientes son:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Cuando f está definida en $[0, L]$ y necesitamos su serie de Fourier de senos definimos la **extensión impar periódica** de f como la función de periodo $2L$ tal que:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, L], \\ -f(-x), & x \in (-L, 0), \end{cases}$$

y la serie de Fourier de esta extensión impar en $[-L, L]$ es la serie de Fourier de senos de f en $[0, L]$.

Ejemplo 27. La extensión impar de $f(x) = x$ en $[0, L]$ a $[-L, L]$ es $F(x) = x$ y su serie de Fourier de senos en $[0, L]$ es:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

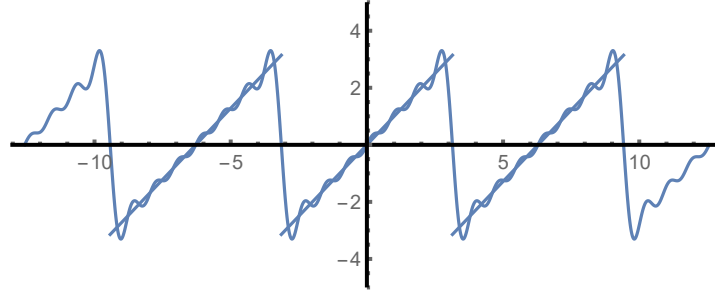


Figura 4.1: Primeros 7 sumandos de la serie de Fourier de senos de $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$, comparados con la extensión periódica impar.

4.3.3 Series de Fourier de cosenos

En una función **par** ($f(-x) = f(x)$) la simetría hace que $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$, luego:

PROPOSICIÓN 4.3. La serie de Fourier de una función par es una serie de cosenos:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L},$$

con coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Dada una función f definida en $[0, L]$, si necesitamos su serie de Fourier de cosenos definimos la **extensión par periódica** de f como la función de periodo $2L$ tal que:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, L], \\ f(-x), & x \in (-L, 0), \end{cases}$$

y la serie de Fourier de esta extensión a $[-L, L]$ es la serie de Fourier de cosenos de f en $[0, L]$.

Ejemplo 28. La extensión par de $f(x) = x$ en $[0, L]$ a $[-L, L]$ es $F(x) = |x|$ y su serie de Fourier de cosenos en $[0, L]$ es:

$$x \sim \frac{L}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4L}{(2k+1)^2\pi^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{L}.$$

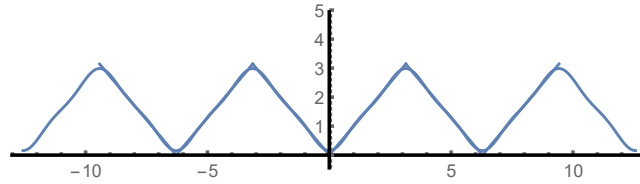


Figura 4.2: Primeros 3 sumandos de la serie de Fourier de cosenos de $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$, comparados con la extensión periódica par.

En las figuras de las series de Fourier en senos y cosenos de la función $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$ observamos que la segunda converge mucho más rápidamente.

4.3.4 Continuidad de las series de Fourier

Como consecuencia de las definiciones anteriores y la convergencia de las series de Fourier tenemos:

TEOREMA 4.4. (*Continuidad*)

1. **Series de Fourier generales:** Si f es C^1 a trozos en $(-L, L)$, entonces la serie de Fourier de f es continua si y solo si f es continua en $[-L, L]$ y $f(-L) = f(L)$.
2. **Series de cosenos:** Si f es C^1 a trozos en $(0, L)$, entonces la serie de Fourier de cosenos de f es continua si y solo si f es continua en $[0, L]$.
3. **Series de senos:** Si f es C^1 a trozos en $(0, L)$, entonces la serie de Fourier de senos de f es continua si y solo si f es continua en $[0, L]$ y $f(0) = f(L) = 0$.

Observemos que la continuidad de las series de senos es la más exigente y la de las series de cosenos la que menos condiciones requiere.

4.3.5 Otras propiedades de las series de Fourier

Al considerar series de Fourier para resolver EDPs necesitaremos en alguna ocasiones derivar e integrar este tipo de expresiones. A continuación estudiamos en qué condiciones podemos hacerlo.

TEOREMA 4.5. (*Derivabilidad*)

1. **Series de Fourier generales:** Si la serie de Fourier de f es continua y f es C^1 a trozos, entonces la serie de Fourier de f se puede derivar término a término, y la serie obtenida es la serie de Fourier de f' (que converge a f' en los puntos de continuidad de f').
2. **Series de Fourier de cosenos:** Si f es continua en $[0, L]$ y f es C^1 a trozos en $(0, L)$, entonces la serie de Fourier de cosenos de f se puede derivar término a término, y la serie obtenida es la serie de Fourier de senos de f' (que converge a f' en los puntos de continuidad de f').
3. **Series de Fourier de senos:** Si f es continua en $[0, L]$ y f es C^1 a trozos en $(0, L)$, entonces se puede derivar término a término la serie de Fourier de senos de f si y sólo si $f(0) = f(L) = 0$. En el caso de que se pueda derivar término a término, la serie obtenida es la serie de Fourier de cosenos de f' (que converge a f' en los puntos de continuidad de f').

Observamos que de nuevo las series de senos son más exigentes pues si f es continua en $[0, L]$ y f es C^1 a trozos, entonces la serie de Fourier de senos de f :

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

no se puede derivar término a término en general. Sin embargo, la serie de cosenos de la derivada se puede probar que es:

$$f'(x) \sim \frac{1}{L}(f(L) - f(0)) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} b_n + \frac{2}{L}((-1)^n f(L) - f(0)) \right) \cos \frac{n\pi x}{L},$$

y, como puede verse directamente, esto coincide con la derivada término a término de la serie de Fourier de senos de f si y solo si $f(0) = f(L) = 0$.

También necesitaremos derivar series respecto a variables que no aparecen en las autofunciones y eso será fácil:

TEOREMA 4.6. (*Derivación respecto a un parámetro*)

Si $u = u(x, t)$ es una función continua en $[-L, L] \times [0, \infty)$ y además $\partial u / \partial t$ es C^1 a trozos como función de $x \in (-L, L)$ para cada $t \in [0, \infty)$, entonces su serie de Fourier

$$u(x, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

se puede derivar término a término con respecto al parámetro t , obteniendo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sim a'_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Respecto a la integración tenemos que:

TEOREMA 4.7. (*Integración*)

Si f es C^1 a trozos, entonces sus tres series de Fourier se pueden integrar término a término, y el resultado es una serie que converge para todo $x \in [-L, L]$ a la integral de f .

Sin embargo, la serie obtenida puede **no** ser una serie de Fourier, según vemos:

Si f es C^1 a trozos en $(-L, L)$ y tiene una serie de Fourier en dicho intervalo:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

la integración término a término da:

$$\int_{-L}^x f(t) dt \sim a_0(x + L) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n L}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} + \frac{b_n L}{n\pi} \left((-1)^n - \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \right),$$

que, como puede verse directamente, es una serie de Fourier si y solo si $a_0 = 0$.

4.4 Otros ejemplos de separación de variables

4.4.1 La ecuación del calor en una varilla con extremos aislados

El problema es ahora

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(CC Neuman),} \\ \text{(CI).} \end{array}$$

Buscamos soluciones de la forma $u(x, t) = \varphi(x)T(t)$. La ecuación temporal es la misma que en el ejemplo previo de la varilla y el problema de autovalores para x es:

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda \varphi(x) = 0 & \implies \varphi(x) = e^{rx}, \quad r^2 + \lambda = 0. \\ \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0. \end{cases}$$

Los autovalores y autofunciones son ahora:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = c_1 \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

donde $\varphi_0(x) = 1$. Entonces, utilizando el principio de superposición obtenemos que:

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt},$$

La condición inicial implica que

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Esto es una serie de Fourier de cosenos. Las **relaciones de ortogonalidad** para las autofunciones son:

$$\int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{L}{2}, & n = m \neq 0 \\ L, & n = m = 0 \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

y con ellas obtenemos:

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) dy, \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \cos \frac{n\pi y}{L} dy, \quad n = 1, 2, \dots$$

Juntando todo tenemos la representación de la solución mediante la función de Green

$$u(x, t) = \int_0^L f(y) G(x, y, t) dy,$$

donde

$$G(x, y, t) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt}.$$

4.4.2 Ecuación de Laplace en un disco

En el disco de centro $(0, 0)$ y radio a utilizamos coordenadas polares, poniendo $u = u(r, \theta)$. Escribiendo el laplaciano en polares obtenemos:

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & -\pi < \theta < \pi, \quad r > 0, \\ u(a, \theta) = f(\theta), & r = a, \end{cases} \quad (\text{CC}).$$

Preferimos el intervalo $[-\pi, \pi]$ porque simplifica los cálculos posteriores.

Aquí hay cuatro derivadas y solo una condición, luego necesitamos tres condiciones más. Estas son las **condiciones implícitas** (que no nos dan directamente en el problema):

1. **Acotación en el origen** (o de no singularidad): $|u(0, \theta)| < \infty$.
2. **Condiciones de periodicidad:**

$$u(r, -\pi) = u(r, \pi), \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi).$$

Buscamos ahora soluciones producto $u(r, \theta) = \varphi(\theta)G(r)$. Las condiciones de periodicidad dan lugar a dos condiciones para φ y obtenemos el siguiente problema de autovalores, que es el **problema angular**:

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda \varphi = 0, \\ \varphi(-\pi) = \varphi(\pi), \\ \varphi'(-\pi) = \varphi'(\pi). \end{cases}$$

Los autovalores son $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y las correspondientes autofunciones:

$$\sin n\theta, \quad \text{y} \quad \cos n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para $n = 0$ observamos que solo hay una autofunción, $\varphi_0(\theta) = 1$. Para cada uno de los otros autovalores hay dos autofunciones asociadas.

El **problema radial** tiene una ecuación de tipo Euler:

$$\begin{cases} r^2 G'' + r G' - n^2 G = 0, \\ |G(0)| < \infty, \end{cases} \implies \begin{cases} G_n(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n}, & n > 0, \\ G_0(r) = k_1 + k_2 \log r, & n = 0, \end{cases}$$

Con la condición de acotación, $c_2 = k_2 = 0$. Utilizando el principio de superposición obtenemos la solución:

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n \cos n\theta + B_n r^n \sen n\theta).$$

Si f se puede escribir como una serie de Fourier general:

$$u(a, \theta) = f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n a^n \cos n\theta + B_n a^n \sen n\theta),$$

podemos calcular los coeficientes utilizando las relaciones de ortogonalidad de senos y cosenos de la serie de Fourier de la sección anterior. En nuestro caso $L = \pi$ y obtenemos los coeficientes:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) d\phi, \\ (n \geq 1) \quad A_n &= \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi, \\ B_n &= \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \sen n\phi d\phi. \end{aligned}$$

De nuevo tenemos la representación de la solución mediante una función de Green

$$u(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) G(r, \theta, \phi) d\phi,$$

donde

$$G(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi a^n} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\theta \cos n\phi + \sen n\theta \sen n\phi) r^n.$$

– $\mathcal{A}_\delta \mathcal{P}$ –

– $\mathcal{ERC}$ –

