

**uc3m**

Universidad **Carlos III** de Madrid

Departamento de Matemáticas

## **CÁLCULO III. Apuntes**

**Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales**

**Tema 5**

Arturo de Pablo  
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M

<http://ocw.uc3m.es/matematicas>



# 5

---

## PROBLEMAS DE AUTOVALORES DE STURM-LIOUVILLE

En este tema extendemos la resolución por separación de variables de EDPs estudiando tipos más generales de problemas de autovalores.

### Contenido

---

5.1. Introducción . . . . .	55
5.1.1. Ejemplos . . . . .	56
5.1.2. Definiciones y teorema fundamental . . . . .	56
5.1.3. Ilustración del teorema . . . . .	58
5.2. Series generalizadas de Fourier . . . . .	59
5.3. Cociente de Rayleigh y Principio de Minimización . . . . .	60
5.4. Ecuación de Bessel . . . . .	61
5.4.1. Ecuación de ondas en un disco: caso radial . . . . .	61
5.4.2. Ecuaciones y funciones de Bessel . . . . .	62
5.4.3. Resolución de la ecuación de ondas radial con funciones de Bessel . . . . .	63

---

### 5.1 Introducción

Al resolver EDPs por separación de variables tenemos que resolver siempre un problema de autovalores. Los problemas de autovalores que hemos

visto en el tema anterior son casos particulares de otros mucho más generales que estudiamos ahora.

### 5.1.1 Ejemplos

En los siguientes casos vemos cómo de forma natural aparecen problemas de autovalores que aún no hemos resuelto.

1. **Ecuación del calor en una varilla no uniforme con fuentes de calor:**

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q,$$

donde  $c(x)$  es el calor específico,  $\rho(x)$  es la densidad,  $K(x)$  la conductividad y  $Q(x, t)$  las fuentes de calor, que supondremos de la forma  $Q(x, t) = \alpha(x)u(x, t)$ . Con condiciones de contorno homogéneas podemos separar variables,  $u(x, t) = \varphi(x)G(t)$ ,

$$c\rho\varphi G' = G (K\varphi')' + \alpha\varphi G,$$

y obtenemos la ecuación espacial:

$$(K\varphi')' + \alpha\varphi + \lambda c\rho\varphi = 0.$$

2. **Vibración de una cuerda no uniforme con rozamiento:**

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha\varphi,$$

Aquí  $\rho(x)$  es la densidad,  $T$  la tensión que suponemos constante y  $\alpha(x)$  representa el rozamiento. La ecuación espacial obtenida al separar variables cuando hay condiciones de contorno homogéneas es:

$$T\varphi'' + \alpha\varphi + \lambda\rho\varphi = 0.$$

Las dos ecuaciones obtenidas son de una misma forma, que describimos en general ahora.

### 5.1.2 Definiciones y teorema fundamental

Un problema de autovalores de Sturm-Liouville regular consiste en una ecuación de Sturm-Liouville, que es del tipo:

$$(p\varphi')' + q\varphi + \lambda\sigma\varphi = 0, \quad a < x < b,$$

donde  $p, q$  y  $\sigma$  son funciones de  $x$ , junto con condiciones de contorno **regulares**, que son del tipo:

$$\beta_1\varphi(a) + \beta_2\varphi'(a) = 0,$$

$$\beta_3\varphi(b) + \beta_4\varphi'(b) = 0,$$

siendo  $\beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Además, las funciones  $p, q$  y  $\sigma$  deben ser continuas en el intervalo  $[a, b]$ , con  $p > 0$  y  $\sigma > 0$ . Las incógnitas son la **autofunción**  $\varphi$  y el **autovalor**  $\lambda$ .

Las condiciones de contorno regulares incluyen las de tipo Dirichlet y Neumann, pero no las condiciones de periodicidad ni la de acotación.

Sobre estos problemas, aunque no sepamos resolverlos de manera explícita, conocemos muchas propiedades según vemos en el siguiente teorema.

**TEOREMA 5.1.** *(de Sturm-Liouville).*

*Todos los problemas de Sturm-Liouville regulares cumplen que:*

1. *Todos los autovalores  $\lambda$  son reales y forman una sucesión infinita*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots$$

*con un autovalor mínimo, normalmente denotado por  $\lambda_1$  y con  $\lambda_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .*

2. *A cada autovalor  $\lambda_n$  le corresponde una autofunción, denotada por  $\varphi_n$  (única salvo constantes multiplicativas), que tiene exactamente  $n - 1$  ceros en el intervalo  $a < x < b$ .*

3. *Las autofunciones  $\varphi_n$  forman un conjunto "completo", es decir, cualquier función suave a trozos  $f$  se puede representar en **serie de Fourier generalizada** de las autofunciones:*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

*Más aún, esta serie converge al valor  $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$  en  $a < x < b$  (si se eligen los coeficientes  $a_n$  adecuadamente).*

4. *Las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales respecto a la función peso  $\sigma$ . En otras palabras,*

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) \sigma(x) dx = 0, \quad \text{si } \lambda_n \neq \lambda_m.$$

5. Cada autovalor está relacionado con su autofunción mediante el **coeficiente de Rayleigh**:

$$\lambda = \frac{[-p\varphi\varphi']_a^b + \int_a^b [p(\varphi')^2 - q\varphi^2]}{\int_a^b \varphi^2\sigma}.$$

Las condiciones de contorno pueden simplificar esta fórmula (el primer sumando es en general cero). Además, el teorema es válido casi por completo también para problemas de autovalores de Sturm-Liouville con condiciones de contorno que no son regulares, como las periódicas o de acotación. En estos problemas esas condiciones son algo diferentes a las ya conocidas:

**Condiciones de periodicidad:**

$$\begin{cases} \varphi(a) = \varphi(b), \\ p(a)\varphi'(a) = p(b)\varphi'(b). \end{cases}$$

**Condición de acotación:**  $|\varphi(x)| < \infty$  cuando  $p(x) = 0$ , de tal forma que el producto  $p(x)\varphi(x)$  es nulo en esos puntos.

Con estos tipos de condiciones de contorno periódicas o de acotación hemos visto ejemplos en que no hay unicidad de las autofunciones, sin embargo el resto del teorema es cierto.

### 5.1.3 Ilustración del teorema

Consideramos el ejemplo más sencillo de problema de Sturm-Liouville regular:

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases}$$

Como ya sabemos, los autovalores y sus correspondientes autofunciones son

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \text{sen } \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

Comprobamos ahora el teorema:

1. **Autovalores:** Existe una cantidad infinita de autovalores reales:  $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$ , con un autovalor mínimo,  $\lambda_1 = (\pi/L)^2$ , y  $\lambda_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

2. **Autofunciones:** A cada autovalor le corresponde una única autofunción (salvo producto por constantes)  $\varphi_n(x) = \text{sen } n\pi x/L$ . La autofunción  $n$ -ésima tiene exactamente  $(n - 1)$  ceros en  $(0, L)$ :  $x_j = jL/n$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$ .

3. **Serie de autofunciones:** Podemos representar cualquier función suave a trozos  $f$  en serie de las autofunciones,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L},$$

que es la serie de Fourier de senos de  $f$  y sabemos que converge a  $[f(x^+) + f(x^-)]/2$  para  $0 < x < L$ , con lo que converge a  $f(x)$  para  $0 < x < L$  si  $f$  es una función continua.

4. **Ortogonalidad de las autofunciones:** Como el peso es  $\sigma(x) = 1$ , la condición de ortogonalidad se reduce a

$$\int_0^L \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{sen } \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \quad n \neq m.$$

Esta ortogonalidad es la que nos permite calcular los coeficientes de la serie.

5. **Cociente de Rayleigh:** Comprobamos que nos da el valor del autovalor asociado a cada autofunción:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{[-p\varphi_n\varphi_n']_a^b + \int_a^b [p(\varphi_n')^2 - q\varphi_n^2]}{\int_a^b \varphi_n^2 \sigma} = \frac{\int_0^L (\varphi_n')^2}{\int_0^L \varphi_n^2} \\ &= \frac{\int_0^L \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos^2 \frac{n\pi x}{L}}{\int_0^L \text{sen}^2 \frac{n\pi x}{L}} = \frac{(n\pi/L)^2 L/2}{L/2} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \end{aligned}$$

## 5.2 Series generalizadas de Fourier

Los coeficientes de las series de Fourier generalizadas se pueden calcular utilizando la ortogonalidad de las autofunciones respecto al peso  $\sigma$ , según el apartado 4 del teorema. El procedimiento es similar al utilizado con las series de Fourier. Partimos de una serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad x \in [a, b],$$

multiplicamos por  $\varphi_m(x)$  (con  $m$  fijo) y  $\sigma(x)$  para poder aprovechar la ortogonalidad. Suponemos que todas las operaciones que necesitemos realizar con las series son válidas, por lo que utilizamos el signo de igualdad,

$$f(x)\varphi_m(x)\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)\varphi_m(x)\sigma(x), \quad x \in [a, b].$$

Integrando en  $[a, b]$  obtenemos

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\sigma(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\sigma(x) dx.$$

Por la ortogonalidad con respecto al peso  $\sigma$  todas las integrales del miembro derecho se anulan excepto la correspondiente a  $n = m$ :

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\sigma(x) dx = a_m \int_a^b \varphi_m^2(x)\sigma(x) dx.$$

La integral de la derecha no es nula porque  $\sigma > 0$  por la definición de problema de Sturm-Liouville regular, y  $\varphi_n$  no puede ser idénticamente nula por ser autofunción. Podemos por tanto dividir por la integral para calcular el coeficiente de Fourier generalizado  $a_m$ :

$$a_m = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\sigma(x) dx}{\int_a^b \varphi_m^2(x)\sigma(x) dx}.$$

### 5.3 Cociente de Rayleigh y Principio de Minimización

El cociente de Rayleigh se obtiene a partir de la ecuación diferencial de Sturm-Liouville,

$$(p\varphi')' + q\varphi + \lambda\sigma\varphi = 0.$$

Multiplicando por  $\varphi$  e integrando, se tiene

$$\int_a^b (\varphi (p\varphi')' + q\varphi^2) + \lambda \int_a^b \varphi^2\sigma = 0,$$

y como  $\int_a^b \varphi^2\sigma > 0$ , podemos despejar  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{-\int_a^b (\varphi (p\varphi')' + q\varphi^2)}{\int_a^b \varphi^2\sigma}.$$

Integrando por partes,

$$\lambda = \frac{[-p\varphi\varphi']_a^b + \int_a^b (p(\varphi')^2 - q\varphi^2)}{\int_a^b \varphi^2 \sigma}.$$

El cociente de Rayleigh nos proporciona una información muy útil sobre los autovalores (por ejemplo, el signo), precisamente cuando el problema no se puede resolver de manera explícita. También permite obtener estimaciones del primer autovalor:

**TEOREMA 5.2.** (*Principio de minimización*)

*El primer autovalor de un problema regular de Sturm-Liouville cumple:*

$$\lambda_1 = \min_u \frac{[-puu']_a^b + \int_a^b (p(u')^2 - qu^2)}{\int_a^b u^2 \sigma},$$

donde el mínimo se calcula sobre todas las funciones continuas a trozos en  $(a, b)$  que cumplen las condiciones de contorno.

El mínimo se alcanza solamente para  $u = \varphi_1$ , la autofunción correspondiente al autovalor mínimo. En problemas como el del calor, el autovalor mínimo es de gran importancia, pues suele representar el comportamiento a largo plazo de las soluciones.

## 5.4 Ecuación de Bessel

### 5.4.1 Ecuación de ondas en un disco: caso radial

Describamos el problema con coordenadas polares:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right), & 0 < r < a, \quad t > 0, \\ u(a, t) = 0, & t > 0, \\ u(r, 0) = \alpha(r), & 0 < r < a, \\ u_t(r, 0) = \beta(r), & 0 < r < a. \end{cases}$$

Al suponer solución radial no hay derivadas respecto del ángulo en el laplaciano. Necesitamos además la condición implícita de acotación:

$$|u(0, t)| < \infty.$$



Separamos  $u(r, t) = \varphi(r)G(t)$  y obtenemos la ecuación temporal:

$$G''(t) + \lambda c^2 G(t) = 0,$$

y el problema espacial:

$$\begin{cases} (r\varphi')' + \lambda r\varphi = 0, & 0 < r < a, \\ \varphi(a) = 0, \\ |\varphi(0)| < \infty. \end{cases}$$

Este último es un problema de Sturm-Liouville ( $p(r) = r$ ,  $q(r) = 0$ ,  $\sigma(r) = r$ ) no regular, pero podemos calcular el cociente de Rayleigh y obtenemos que:

$$\lambda = \frac{[-r\varphi(r)\varphi'(r)]_0^a + \int_0^a r(\varphi')^2(r) dr}{\int_0^a \varphi^2(r) r dr} = \frac{\int_0^a r(\varphi')^2(r) dr}{\int_0^a \varphi^2(r) r dr} \geq 0,$$

Además,  $\lambda = 0 \implies \varphi'(r) = 0 \implies \varphi(r) = Cte = 0$ , luego  $\lambda = 0$  no es autovalor y todos los autovalores son positivos. Entonces podemos hacer el cambio:

$$z = \sqrt{\lambda}r, \quad \frac{d}{dr} = \sqrt{\lambda} \frac{d}{dz}, \quad \varphi(r) = \psi(z),$$

y multiplicando también por  $z$  obtenemos:

$$z^2\psi'' + z\psi' + z^2\psi = 0.$$

Dedicamos el apartado siguiente a estudiar esta ecuación.

### 5.4.2 Ecuaciones y funciones de Bessel

Llamamos **ecuación de Bessel de orden cero** a:

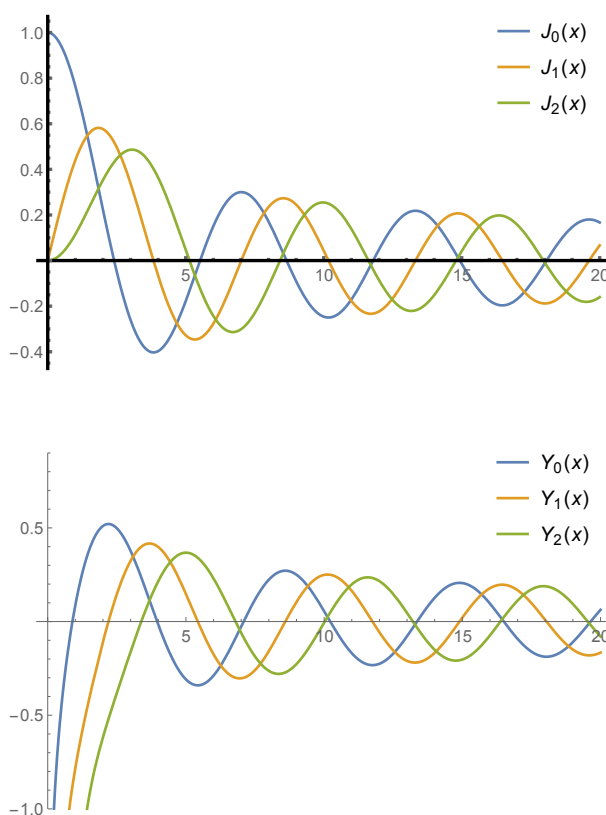
$$z^2\psi'' + z\psi' + z^2\psi = 0,$$

y la **ecuación de Bessel de orden m** es:

$$z^2\psi'' + z\psi' + (z^2 - m^2)\psi = 0.$$

Tienen por solución  $\psi(z) = c_1 J_m(z) + c_2 Y_m(z)$ , donde  $J_m$  e  $Y_m$  son respectivamente las **funciones de Bessel de orden m de primera y de segunda especie**. Son funciones oscilantes, con el siguiente comportamiento para  $z \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} J_0(z) &\sim 1, & Y_0(z) &\sim \log z, \\ J_m(z) &\sim z^m, & Y_m(z) &\sim z^{-m}, \quad m \geq 1. \end{aligned}$$



**Figura 5.1:** Funciones de Bessel de primera y segunda especie.

Así, las de primera especie están acotadas en el origen, mientras que las de segunda especie no. Además, los ceros de estas funciones forman una sucesión creciente, y aunque no se pueden calcular de manera exacta, están tabulados y son conocidos de forma aproximada. La Figura 5.1 muestra las gráficas de las tres primeras funciones de Bessel de primera y segunda especie.

### 5.4.3 Resolución de la ecuación de ondas radial con funciones de Bessel

En nuestro ejemplo de la ecuación radial de ondas en un disco, deshaciendo el cambio tenemos:

$$\varphi(r) = c_1 J_0(r\sqrt{\lambda}) + c_2 Y_0(r\sqrt{\lambda})$$

La acotación en el origen implica  $c_2 = 0$  y la condición de frontera nos da:

$$J_0(a\sqrt{\lambda}) = 0, \quad \implies \quad a\lambda = \eta,$$

donde  $\eta$  es uno de los infinitos ceros de  $J_0$ :  $\{\eta_{0,n}\}_{n=1}^{\infty}$ . Hemos obtenido los autovalores:

$$\lambda_n = \left(\frac{\eta_{0,n}}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Las autofunciones son entonces:

$$\varphi_n(r) = J_0\left(\frac{\eta_{0,n}r}{a}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

La ecuación temporal se puede ahora resolver utilizando que los autovalores son positivos:

$$G_n(t) = c_1 \cos\left(\frac{c\eta_{0,n}t}{a}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{c\eta_{0,n}t}{a}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Finalmente la solución de nuestro problema tiene la forma:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\eta_{0,n}r}{a}\right) \left\{ A_n \cos\left(\frac{c\eta_{0,n}t}{a}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{c\eta_{0,n}t}{a}\right) \right\}.$$

Las autofunciones son soluciones de un problema de Sturm-Liouville, luego son ortogonales respecto al peso  $\sigma(r) = r$  y son un sistema completo. Esto permite calcular los coeficientes:

$$u(r, 0) = \alpha(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\eta_{0,n}r}{a}\right) \implies A_n = \frac{\int_0^a \alpha(r) J_0\left(\frac{\eta_{0,n}r}{a}\right) r dr}{\int_0^a J_0^2\left(\frac{\eta_{0,n}r}{a}\right) r dr},$$

$$u_t(r, 0) = \beta(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{c\eta_{0,n}}{a} J_0\left(\frac{\eta_{0,n}r}{a}\right) \implies B_n = \frac{\int_0^a \beta(r) J_0\left(\frac{\eta_{0,n}r}{a}\right) r dr}{\frac{c\eta_{0,n}}{a} \int_0^a J_0^2\left(\frac{\eta_{0,n}r}{a}\right) r dr}.$$

La representación usando la función de Green es más complicada en este caso.

– A<sub>3</sub>P –

– ERC –

