uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Apuntes

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 6

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

6

TRANSFORMADA DE FOURIER

Dedicamos este tema a la potente herramienta matemática de la transformada de Fourier y su aplicación a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

Contenido

6.1 Transformada de Fourier en $\mathbb{R}$

6.1.1 Definición y propiedades básicas

Si f es integrable en $\mathbb{R}$ se define su **transformada de Fourier** como:

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{i\omega x}\,dx\,.$$

Esta transformada está relacionada con la de Laplace, que se definía solo para valores positivos. Utilizaremos la siguiente fórmula para recuperar la función, usando lo que se denomina **transformada inversa de Fourier** $\mathcal{F}^{-1}$:

TEOREMA 6.1.

Si f es continua entonces:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{-i\omega x}\, d\omega.$$

Las propiedades más importantes de la transformada de Fourier son:

TEOREMA 6.2.

1. $\mathcal{F}(af + bg)(\omega) = a\widehat{f}(\omega) + b\widehat{g}(\omega), \quad a, b \in \mathbb{R}.$
2. $\mathcal{F}(f(x - x_0))(\omega) = \mathrm{e}^{i\omega x_0}\widehat{f}(\omega), \quad x_0 \in \mathbb{R}.$
3. $\mathcal{F}(f(\alpha x))(\omega) = \dfrac{1}{|\alpha|}\, \widehat{f}\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}.$
4. $\mathcal{F}\left(f'\right)(\omega) = -i\omega \widehat{f}(\omega).$
5. $\mathcal{F}\left(\dfrac{d^k f}{dx^k}\right)(\omega) = (-i\omega)^k \widehat{f}(\omega), \quad k \in \mathbb{N}.$
6. *Si* $f = f(x,t)$, *entonces* $\mathcal{F}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)(\omega) = \dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial t}(\omega).$

***Ejemplo* 29.** Algunas transformadas importantes (siempre $\alpha > 0$).

1. $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right)(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}, \quad \mathcal{F}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\alpha}}\right)(\omega) = \mathrm{e}^{-\alpha\omega^2}.$
2. $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\alpha|x|})(\omega) = \dfrac{\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}, \quad \mathcal{F}\left(\dfrac{2\alpha}{x^2 + \alpha^2}\right)(\omega) = \mathrm{e}^{-\alpha|\omega|}.$

6.1.2 Propiedades avanzadas

Recordemos que una **delta de Dirac** es, según vimos en el Tema 3, el límite de una sucesión de funciones con integral 1 que se van concentrando en el origen. Podemos calcular su transformada.

Teorema 6.3.

$$\mathcal{F}(\delta(x))(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,, \qquad \mathcal{F}(\delta(x - x_0))(\omega) = \frac{e^{i\omega x_0}}{2\pi}\,.$$

Para dos funciones integrables definidas en $\mathbb{R}$ se define su **convolución** como

$$(f * g)\,(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)\, g(y)\, dy\,.$$

(Esta definición es diferente de la utilizada con la transformada de Laplace). Se tiene entonces:

Teorema 6.4.

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).$$

Hacemos notar de paso que existen diferentes definiciones de transformada de Fourier según el coeficiente y el exponente que se utilice, según se persiga que sea más sencilla la transformada directa o la inversa. No es raro pues encontrarse en los textos de matemáticas la transformada de Fourier definida como

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx\,.$$

6.2 Resolución de ecuaciones mediante transformada de Fourier

6.2.1 Ecuación del calor

Queremos resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{si } x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & \text{si } x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Si aplicamos la transformada de Fourier en la variable x, se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\omega, t) = -k\omega^2 \widehat{u}(\omega, t), & t > 0, \\ \widehat{u}(\omega, 0) = \widehat{f}(\omega). \end{cases}$$

Esta es una EDO en t, que resolvemos separando variables,

$$\widehat{u}(\omega, t) = \widehat{f}(\omega)\, e^{-k\omega^2 t}.$$

Ahora hay que antitransformar. Usando la transformada inversa de la gaussiana y la transformada de la convolución,

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{kt}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}} \qquad \Longrightarrow \qquad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\, f(y)\, dy\,.$$

De esta expresión deducimos la función de Green

$$G(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}.$$

Vemos que $G(x,y,t) = \mathcal{K}(x-y,t)$, donde

$$\mathcal{K}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

se denomina **núcleo de Gauss**.

6.2.2 Ecuación de Laplace en el semiplano superior

Consideramos ahora el problema

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si aplicamos la transformada de Fourier en la variable x se obtiene

$$\begin{cases} -\omega^2 \widehat{u}(\omega,y) \ + \ \dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial y^2}(\omega,y) = 0, & \omega \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ \widehat{u}(\omega,0) = \widehat{f}(\omega), & \omega \in \mathbb{R}, \\ \lim\limits_{y\to\infty} \widehat{u}(\omega,y) = 0, & \omega \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De nuevo tenemos una EDO, esta vez en y. Su solución es $\widehat{u}(\omega,y) = A\mathrm{e}^{|\omega|y} + B\mathrm{e}^{-|\omega|y}$, que con los datos frontera queda,

$$\widehat{u}(\omega,y) = \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-|\omega|y}.$$

Usando la transformada inversa de la exponencial y la transformada de la convolución,

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-|\omega|y}\right) = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad \Longrightarrow \qquad u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-s)^2+y^2}\, f(s)\, ds\,.$$

En este caso la función de Green es $G(x,s,y) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{(x-s)^2+y^2}$. Igual que antes, $G(x,s,y) = \mathcal{P}(x-s,y)$, donde

$$\mathcal{P}(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

se denomina **núcleo de Poison**.

6.3 Transformada de Fourier en varias variables

6.3.1 Definición y propiedades básicas

Si f es integrable en $\mathbb{R}^n$, se define su **transformada de Fourier** como

$$\widehat{f}(\vec{\omega}) = \mathcal{F}(f)(\vec{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\, \mathrm{e}^{i\vec{\omega}\cdot\vec{x}}\, d\vec{x}\,,$$

donde $\vec{\omega}\cdot\vec{x} = \omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n$ y $d\vec{x} = dx_1 \cdots dx_n$.

Las propiedades de la transformada de Fourier en varias variables son análogas, con las obvias modificaciones, a las propiedades mostradas antes en dimensión uno.

Teorema 6.5.

1. $f(\vec{x}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(\vec{x}) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\vec{\omega})\, \mathrm{e}^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{x}}\, d\vec{\omega}$.
2. $\mathcal{F}(af + bg)(\vec{\omega}) = a\widehat{f}(\vec{\omega}) + b\widehat{g}(\vec{\omega})$.
3. $\mathcal{F}(f(\vec{x} - \vec{x}_0))(\vec{\omega}) = \mathrm{e}^{i\vec{\omega}\cdot\vec{x}_0}\widehat{f}(\vec{\omega})$.
4. $\mathcal{F}(f(\alpha\vec{x}))(\vec{\omega}) = \dfrac{1}{\alpha}\, \widehat{f}\left(\dfrac{\vec{\omega}}{\alpha}\right)$.
5. $\mathcal{F}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\vec{\omega}) = -i\omega_j \widehat{f}(\vec{\omega}), \quad j = 1, 2 \cdots, n$.
6. $\mathcal{F}\left(\Delta f\right)(\vec{\omega}) = -|\vec{\omega}|^2 \widehat{f}(\vec{\omega})$.
7. *Si* $f = f(\vec{x}, t)$, *entonces* $\mathcal{F}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)(\vec{\omega}) = \dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial t}(\vec{\omega})$.
8. $\mathcal{F}(f * g)(\vec{\omega}) = \widehat{f}(\vec{\omega})\widehat{g}(\vec{\omega})$.
9. $\mathcal{F}(\delta(\vec{x}))(\vec{\omega}) = \dfrac{1}{(2\pi)^n}\,, \qquad \mathcal{F}(\delta(\vec{x} - \vec{x}_0))(\vec{\omega}) = \dfrac{\mathrm{e}^{i\vec{\omega}\cdot\vec{x}_0}}{(2\pi)^n}$.
10. $\mathcal{F}\Big(\mathrm{e}^{-\alpha|\vec{x}|^2}\Big)(\vec{\omega}) = \dfrac{1}{(4\pi\alpha)^{n/2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{|\vec{\omega}|^2}{4\alpha}}, \quad \mathcal{F}\left(\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2} \mathrm{e}^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4\alpha}}\right)(\vec{\omega}) = \mathrm{e}^{-\alpha|\vec{\omega}|^2}$.

Solo tenemos que recordar el concepto de **delta de Dirac** que, por ejemplo en dimensión $n = 2$, podemos tomar como

$$\delta(\vec{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(\vec{x}), \qquad \text{donde} \quad f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\varepsilon^2}, & |\vec{x}| \le \varepsilon, \\ 0, & |\vec{x}| > \varepsilon, \end{cases}$$

y extender el de la **convolución**, que en dimensión general n es

$$(f * g)(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x} - \vec{y})\, g(\vec{y})\, d\vec{y}\,.$$

6.3.2 Ecuación del calor en $\mathbb{R}^n$

Como ejemplo resolveremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u, & \text{si } \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(\vec{x},0) = f(\vec{x}), & \text{si } \vec{x} \in \mathbb{R}^n\,. \end{cases}$$

Si aplicamos la transformada de Fourier en la variable $\vec{x}$ se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\vec{\omega},t) = -k|\vec{\omega}|^2\widehat{u}(\vec{\omega},t), \\ \widehat{u}(\vec{\omega},0) = \widehat{f}(\vec{\omega}). \end{cases}$$

La solución de la EDO en t es

$$\widehat{u}(\vec{\omega},t) = \widehat{f}(\vec{\omega})\,\mathrm{e}^{-k|\vec{\omega}|^2 t},$$

que al antitransformar da la solución en términos del núcleo de Gauss,

$$u(\vec{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(\vec{x},\vec{y},t)\, f(\vec{y})\ d\vec{y} = \frac{1}{(4k\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|^2}{4kt}}\ f(\vec{y})\ d\vec{y}\,.$$

– $\mathcal{A}_{\delta}$P–

– $\mathcal{ERC}$–