uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Resolución Problemas

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 1

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1. Métodos elementales de resolución

Problema 1.1.1 $k > 0$ es una constante. *a)* $\dfrac{dN}{dt} = -kN$. *b)* $\dfrac{dP}{dt} = kP(P_0 - P)$. *c)* $\dfrac{dP}{dT} = k\dfrac{P}{T^2}$. *d)* $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{F}{m}$.

Problema 1.1.2 *a)* Resolviendo el sistema $\begin{cases} y = cx + x^2 \\ y' = c + 2x \end{cases}$ para eliminar c, se obtiene $xy' - y - x^2 = 0$; *b)* $(y')^2 + xy' - y = 0$; *c)* la familia es $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, con a, $r \in \mathbb{R}$; como hay dos constantes hay que derivar dos veces, $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$; *d)* $y' = y^2 - 1$; *e)* $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}$.

Problema 1.1.3 *i)* $e^{2y}dy = e^{3x}dx \rightsquigarrow y = \dfrac{1}{2}\log(\dfrac{2}{3}e^{3x} + c)$, *ii)* $\dfrac{e^y}{y+1} = Cxe^x$, *iii)* $(1-y)e^y = e^{-x} + \dfrac{1}{3}e^{-3x} + c$, *iv)* $y^2 + 2 = c(x^2+4)$, *v)* $y - \dfrac{1}{y} = \arctan x + c$, *vi)* $y^2 = x^2 + x + c$, *vii)* $e^{y-x} = \dfrac{C(y+3)^5}{(x+4)^5}$, *viii)* $e^{y-x} = \dfrac{C(x-3)^5}{(y-1)^2}$, *ix)* $\dfrac{\operatorname{sen} y}{1+\cos y} = ce^{2\operatorname{sen} x}$, *x)* $y = ce^{x-x^2/2}$.

Problema 1.1.4 *i)* Poniendo $z = \dfrac{y}{x}$ se tiene $z' = \dfrac{1}{x}(\dfrac{2z^2-1}{z} - z)$, que da $\dfrac{x^2}{z^2-1} = k$, es decir $y^2 = x^2 + cx^4$, *ii)* $\dfrac{z}{1+z} = cx^2 \rightsquigarrow y = \dfrac{x^3}{c-x^2}$, *iii)* $\operatorname{arc\,tg} z = cx^3 \rightsquigarrow y = x\tan(cx^3)$, *iv)* $-\cos z = \log|x| + k \rightsquigarrow y = x\arccos(\log(\dfrac{c}{|x|}))$, *v)* $\mathrm{e}^z = 2\log|x| + k \rightsquigarrow y = x\log(\log(cx^2))$, *vi)* $\log|z| - \dfrac{2}{\sqrt{z}} = -\log|x| + k \rightsquigarrow \log|y| = 2\sqrt{\dfrac{x}{y}} + k$, *vii)* $\log|z^4 + z| = \log|x| + k \rightsquigarrow y^4 + x^3y = cx^5$, *viii)* $\dfrac{z^2}{2} = \log|x| + k \rightsquigarrow y^2 = x^2\log cx^2$, *ix)* $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2/z} - 4\log|z| = 4\log|x| + k \rightsquigarrow e^{2x/y} = \log cy^8$, *x)* $\log|\sec z| = \log|x| + k \rightsquigarrow y = x\arccos(\dfrac{c}{x})$.

Problema 1.1.5

a) Si (x_0, y_0) es el punto de intersección de las dos rectas $Ax + By + C = 0$, $Dx + Ey + F = 0$, en las nuevas variables las rectas pasan por el origen, $Aw + Bz = 0$, $Dw + Ez = 0$. La ecuación queda
$$z' = f\left(\frac{Aw + Bz}{Dw + Ez}\right)$$
que es homogénea.

b) Sustituyendo $D = AE/B$,
$$\frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F} = \frac{Ax + By + C}{\frac{E}{B}(Ax + By) + F)},$$
que es una función de $Ax + By$, por lo que poniendo $z = Ax + By$ la ecuación queda
$$z' = A + By' = A + Bf\left(\frac{z + C}{\frac{E}{B}z + F}\right).$$

Problema 1.1.6 *i)* $z = 2x + 2y + 4 \rightsquigarrow z' = 2(1 + z^2) \rightsquigarrow z = \operatorname{tg}(2x + c) \rightsquigarrow y = -2 - x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x+c)$; *ii)* $z = x - y + 5 \rightsquigarrow \operatorname{cotg}(x-y+5) + \operatorname{cosec}(x-y+5) = c - x$; *iii)* $w = x - 1$, $z = y + 5 \rightsquigarrow 2\arctan\frac{y+5}{x-1} = \log c((x-1)^2 + (y+5)^2)$; *iv)* $z = x + y \rightsquigarrow x - y + 5\log|x+y-1| = c$.

Problema 1.1.7 *i)*, *iii)* y *vi)* no son exactas, *ii)* si ϕ es el potencial del campo $F = (y - x^3, x + y^3)$, se debe tener $\frac{\partial\phi}{\partial x} = y - x^3 \rightsquigarrow \phi = xy - \frac{x^4}{4} + g(y)$; $\frac{\partial\phi}{\partial y} = x + g' = x + y^3 \rightsquigarrow g = \frac{y^4}{4}$; así $\phi = c \rightsquigarrow y^4 - x^4 + 4xy = c$, *iv)* $x^2y^2|x^2 - 4y^2| = c$, *v)* $xe^y + \operatorname{sen} x \cos y = c$, *vii)* $x^2y^3 + y\operatorname{sen} x = c$, *viii)* $e^{2x+c} = \frac{1+xy}{1-xy}$, *ix)* $x^2y^2 + 2x^3y = c$.

Problema 1.1.8 *a)* $\frac{\partial M}{\partial y} = f' = \frac{\partial M}{\partial x} = -1 \rightsquigarrow f(y) = c - y$; *b)* $(\mu f)_y = -\mu \rightsquigarrow \mu = \frac{1}{f}\exp(-\int\frac{1}{f})$; *c)* $\mu(y) = \frac{1}{y^2} \rightsquigarrow x = y(c + \log|y|)$.

Problema 1.1.9 *i)* Intentamos $\mu = \mu(x)$, $\frac{\partial((4x+3y^3)\mu)}{\partial y} = \frac{\partial(3xy^2\mu)}{\partial x} \rightsquigarrow 9y^2\mu = 3y^2\mu + 3xy^2\mu' \rightsquigarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2}{x} \rightsquigarrow \mu = x^2$; la solución ahora es, $x^4 + x^3y^3 = c$; *ii)* si intentamos de nuevo $\mu = \mu(x)$, obtenemos la ecuación $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{8xy+2}{6y^3 - x}$, que es imposible, pues el término de la derecha no depende sólo de x; intentamos entonces $\mu = \mu(y)$, y obtenemos $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$, con solución $2x^2 + \frac{x}{y} + 3y^2 = c$; *iii)* $\mu(y) = \operatorname{sen} y$, $x^2\operatorname{sen} y = c$; *iv)* $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$, $\frac{x^2}{y} + x = c$; *v)* $\mu(y) = y^3$, $y^5\operatorname{sen} x + y^4 = c$; *vi)* $\mu(x) = x^2$, $x^6y = c$.

Problema 1.1.10

$$\frac{\partial(7x^{4+n}y^{1+m} - 3x^ny^{8+m})}{\partial y} = \frac{\partial(2x^{5+n}y^m - 9x^{1+n}y^{7+m})}{\partial x} \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} 7(m+1) = 2(n+5) \\ 3(m+8) = 9(n+1) \end{array}\right. ,$$

que implica $n = 2$, $m = 1$; solución $x^7y^2 - x^3y^9 = c$.

Problema 1.1.11 *i)* $\mu = e^{-\int\frac{3}{x}} = \frac{1}{x^3} \rightsquigarrow y = \frac{1}{\mu}(\int x^3\mu + c) = x^3(x+c)$, *ii)* $\mu = e^x \rightsquigarrow y = e^{-x}(c + \arctan e^x)$, *iii)* $\mu = 1 + x^2 \rightsquigarrow y = \frac{\log|\operatorname{sen} x| + c}{1+x^2}$, *iv)* $\mu = e^x \rightsquigarrow y = (x^2 + c)e^{-x} + x^2 - 2x + 2$, *v)* $\mu = \operatorname{sen} x \rightsquigarrow y = (x^2 + c)\operatorname{cosec} x$, *vi)* $\mu = \frac{1}{x^2} \rightsquigarrow y = x^2(c - x)$, *vii)* $\mu = x\operatorname{sen} x \rightsquigarrow y = \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x + c}{x\operatorname{sen} x}$, *viii)* $\mu = e^{-y^2} \rightsquigarrow x = (3y^2 + c)e^{y^2}$.

Problema 1.1.12 *i)* $z = \frac{1}{y} \rightsquigarrow z' = \frac{z}{x} - 1 \rightsquigarrow z = x(c - \log|x|) \rightsquigarrow y = \frac{1}{x(c - \log|x|)}$; *ii)* $z = \frac{1}{x^2} \rightsquigarrow z' = \frac{2z}{x} - 2x^3 \rightsquigarrow z = x^2(c - x^2) \rightsquigarrow x^2y^2(c - x^2) = 1$; *iii)* $z = y^3 \rightsquigarrow x^3y^3 + 3x(6 - x^2)\operatorname{sen} x + 9(2 - x^2)\cos x = c$; *iv)* $z = y^{1/3} \rightsquigarrow y = (2x^4 + cx^2)^3$; *v)* $z = \frac{1}{y^2} \rightsquigarrow y^2(\frac{1}{20} - \frac{x}{2} + ce^{-10x}) = 1$.

Problema 1.1.13 Es una ecuación de Bernoulli que se puede resolver con el cambio $z = \dfrac{1}{y^2}$; también es una ecuación homogénea que se puede resolver con el cambio $w = \dfrac{y}{x}$; solución $x^4 - x^2y^2 + cy^2 = 0$.

Problema 1.1.14 $z = \log y \rightsquigarrow z' = Qz - P$, lineal; solución $y = e^{cx+2x^2}$.

Problema 1.1.15 Si $\mu(x,y) = \phi(s),\ s = x + y^2$, se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{\partial((3x+2y+y^2)\mu)}{\partial y} = \frac{\partial((x+4xy+5y^2)\mu)}{\partial x} \\ &\rightsquigarrow (2+2y)\phi + (3x+2y+y^2)2y\phi' = (1+4y)\phi + (x+4xy+5y^2)\phi' \\ &\rightsquigarrow \frac{\phi'}{\phi} = \frac{1}{x+y^2} = \frac{1}{s} \rightsquigarrow \phi = s; \end{aligned}$$

la ecuación $(x+y^2)(3x+2y+y^2)\,dx + (x+y^2)(x+4xy+5y^2)\,dy = 0$ es entonces exacta, con solución $x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = c$.

Problema 1.1.16 *i)* Homogénea y Bernoulli con $n = 2$, $y^3 = x^3(3\log|x| + c)$, *ii)* lineal, $2xy + \cos 2x = c$, *iii)* diferencial exacta, $3x^2 + 2y^2 + x^2y^2 = c$, *iv)* diferencial exacta, $e^{xy} + \operatorname{sen} y = c$, *v)* tipo Bernoulli y también diferencial exacta, $xy^3 + x\cos x - \operatorname{sen} x = c$, *vi)* tipo Bernoulli o con un factor integrante, $x^3y^2 + \dfrac{2}{3}x^3 - 2\log|x| = c$.

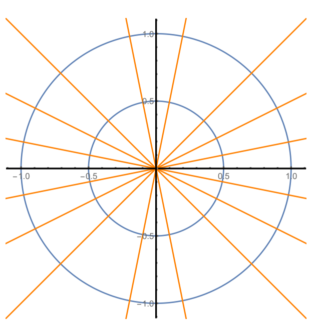
Problema 1.1.17 *i)* $p = y' \rightsquigarrow p' = -\dfrac{p}{x} \rightsquigarrow p = \dfrac{c}{x} \rightsquigarrow y = c_1\log|x| + c_2$; *ii)* $p(y) = y'(x) \rightsquigarrow p' = \dfrac{p}{y} \rightsquigarrow p = cy \rightsquigarrow y = c_2e^{c_1x}$; *iii)* $p(y) = y'(x) \rightsquigarrow p' = -\dfrac{p}{y} \rightsquigarrow p = \dfrac{c}{y} \rightsquigarrow y^2 = c_1x + c_2$; *iv)* $p = y' \rightsquigarrow p' = \dfrac{p}{x} + \dfrac{p^3}{x} \rightsquigarrow p = \dfrac{x}{\sqrt{c-x^2}} \rightsquigarrow x^2 + (y-c_2)^2 = c_1^2$; *v)* $p(y) = y'(x) \rightsquigarrow p' = \dfrac{p}{y} \rightsquigarrow p = cy \rightsquigarrow p' = \dfrac{k^2y}{p} \rightsquigarrow p = \pm\sqrt{k^2y^2+c} \rightsquigarrow y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}$; *vi)* $p = y' \rightsquigarrow p' = -\dfrac{p}{x} + 4 \rightsquigarrow p = 2x + \dfrac{c}{x} \rightsquigarrow y = x^2 + c_1\log|x| + c_2$.

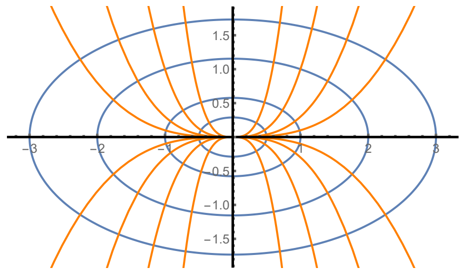
Problema 1.1.18 $z = y - x$ verifica $z' = z^{-2}$, que es de variables separadas, $z = \dfrac{-1}{x+c}$; la solución es $y(x) = x - \dfrac{1}{x+c}$.

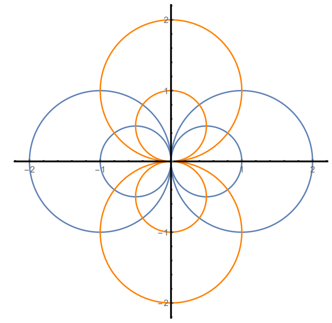
Problema 1.1.19 Sustituyendo $y = kx^\alpha$ se tiene $k\alpha x^{\alpha-1} = 3x^6 - 2kx^{\alpha+4} - \dfrac{1}{3}k^2x^{2\alpha+2} + 2kx^{\alpha-1}$, por lo que $\alpha = 2$, $k = 3$; poniendo $z = y - 3x^2$ queda la ecuación $z' = \dfrac{x^2z^2}{3} + \dfrac{2z}{x}$; ahora $w = z^{-1}$ verifica la ecuación lineal $w' = -\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2w}{x}$, que tiene solución $w = \dfrac{1}{x^2}\left(c - \dfrac{1}{3}\displaystyle\int x^4\right) = \dfrac{15c - x^5}{15x^2}$; finalmente $y = 3x^2 + \dfrac{15x^2}{k - x^5}$.

1.2. Aplicaciones

Problema 1.2.1 *i)* $y_1' = \dfrac{y}{x} = -\dfrac{1}{y_2'}$, *ii)* $y_1' = \dfrac{3y}{x} = -\dfrac{1}{y_2'}$, *iii)* $y_1' = \dfrac{y^2-x^2}{2xy} = -\dfrac{1}{y_2'}$.

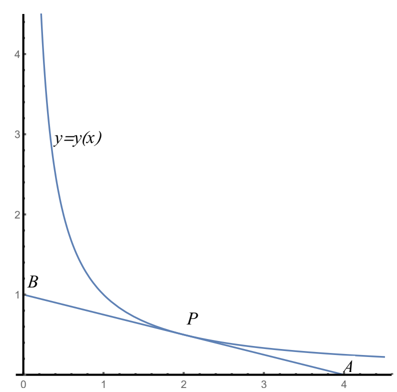




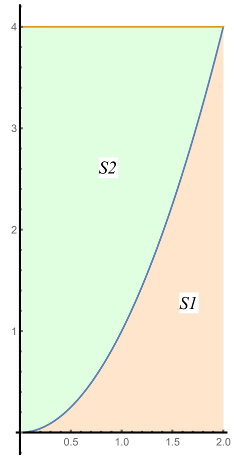


Problema 1.2.2 $i)$ Ecuación de la familia, $y' = \dfrac{2y}{x} \rightsquigarrow$ ecuación de la familia ortogonal, $y' = \dfrac{-x}{2y}$, solución $2y^2 + x^2 = k$; $ii)$ $y' = \dfrac{xy}{1-y^2} \rightsquigarrow 2\log|y| = x^2 + y^2 + k$; $iii)$ $y' = \dfrac{1}{y} \rightsquigarrow y^2 = 2x + k$; $iv)$ $y' = \dfrac{-2x}{3y} \rightsquigarrow 2x^2 + 3y^2 = k$; $v)$ $y' = \dfrac{-x}{\operatorname{tgh} y} \rightsquigarrow 2\log\cosh y + x^2 = k$; $vi)$ $y' = \dfrac{-x^2}{y^2} \rightsquigarrow x^3 + y^3 = k$; $vii)$ $y' = \dfrac{x}{y^2} \rightsquigarrow 2y^3 - 3x^2 = k$; $viii)$ $y' = \dfrac{x^{2/3}}{y^{2/3}} \rightsquigarrow y^{5/3} - x^{5/3} = k$; $ix)$ $y' = \dfrac{x}{y} \rightsquigarrow x^2 - y^2 = k$.

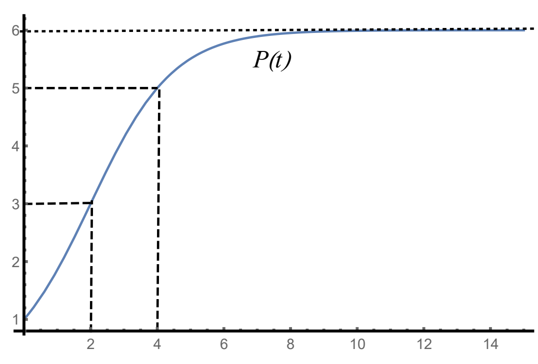
Problema 1.2.3 Dada la curva $y(x)$, recta tangente en $P = (x_0, y_0)$, $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$; puntos de corte de ésta con los ejes, $A = ((x_0 - \dfrac{y(x_0)}{y'(x_0)}, 0)$, $B = (0, y(x_0) - x_0 y'(x_0))$; igualando distancias $|\overline{AP}|^2 = |\overline{BP}|^2 \rightsquigarrow x_0^2 + x_0^2 y'(x_0)^2 = \dfrac{y(x_0)^2}{y'(x_0)^2} + y(x_0)^2$; como P es genérico, se tiene la EDO $x^2(1 + (y')^2) = \dfrac{y^2}{(y')^2}(1 + (y')^2) \rightsquigarrow y' = \pm\dfrac{y}{x} \rightsquigarrow y = \dfrac{c}{x}$, $y = cx$ (la segunda es trivial).



Problema 1.2.4 Si la parte inferior S_1 tiene mitad de área que la superior S_2, tendrá un tercio de área del cuadrado, es decir, $\displaystyle\int_0^x y(s)\,ds = \frac{1}{3}xy \rightsquigarrow 3y = xy' + y \rightsquigarrow y = cx^2$; si la proporción es al revés se obtendría $y = c\sqrt{x}$.



Problema 1.2.5 *a*) Es una ecuación de Bernoulli o de variables separadas, $P(t) = \dfrac{1}{\frac{b}{a} + c\mathrm{e}^{-at}}$, imponiendo el dato inicial, $P(t) = \dfrac{1}{\frac{b}{a} + (\frac{1}{M} - \frac{b}{a})\mathrm{e}^{-at}}$; *b*) si $t = 0$ corresponde a 1990 y calculamos en miles de peces, tenemos $M = 1$, $P(2) = 3$, $P(4) = 5$, que implica el sistema $\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{b}{a} + (1 - \frac{b}{a})e^{-2a}} = 3, \\ \dfrac{1}{\frac{b}{a} + (1 - \frac{b}{a})e^{-4a}} = 5; \end{cases}$ denotando $\dfrac{b}{a} = X$, $e^{-2a} = Y$, se tiene $\begin{cases} X + (1 - X)Y = \dfrac{1}{3}, \\ X + (1 - X)Y^2 = \dfrac{1}{5}, \end{cases}$ que da $X = \dfrac{1}{6}$, $Y = \dfrac{1}{5}$; finalmente, como $e^{-at} = Y^{t/2}$, se tiene la solución $P(t) = \dfrac{6}{1 + 5^{1-t/2}}$; en 1998 se tiene $P(8) = \dfrac{125}{21} \approx 5.952$ peces; *c*) $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = \dfrac{a}{b} = 6 \rightsquigarrow 6.000$ peces.



Problema 1.2.6 *a*) Volumen $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, área $A = 4\pi R^2$; la ecuación $V' = -kA$ implica $4\pi R^2 R' = -k4\pi R^2$, es decir, $R' = -k$, con solución $R(t) = c - kt$; si $R(0) = 2$ y $R(\frac{1}{2}) = \dfrac{3}{2}$, se obtiene $c = 2$, $k = 1$, lo que da $R(t) = 2 - t$; $R(t) = 1$ implica $t = 1$ hora; *b*) $R(t) = 0$ implica $t = 2$ horas.

Problema 1.2.7 $d'(t) = -kd(t) \rightsquigarrow d(t) = d_0 e^{-kt}$, $d(\sigma) = \dfrac{d_0}{2} \rightsquigarrow e^{-k} = 2^{-\frac{1}{\sigma}} \rightsquigarrow d(t) = d_0 2^{-\frac{t}{\sigma}} \rightsquigarrow t = \sigma \log_2(\dfrac{d_0}{d(t)}) \rightsquigarrow T = 5600 \log_2(\dfrac{15{,}30}{d(t)}) + 67$ (actualidad 2017);
a) $T_1 = 3.925$ años; *b*) $T_2 = 8.211$ años; *c*) $T_3 = 12.257$ años.

– $\mathcal{A}_\delta$P–
– $\mathcal{ERC}$–