

**uc3m**

Universidad **Carlos III** de Madrid

Departamento de Matemáticas

## CÁLCULO III. Resolución Problemas

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 3

Arturo de Pablo  
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M  
<http://ocw.uc3m.es/matematicas>



### 3. Transformada de Laplace

#### 3.1. Propiedades de la transformada de Laplace

**Problema 3.1.1** a)  $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ ; integrando por partes,  $\Gamma(2) = \int_0^\infty te^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ ; con el cambio  $t = z^2$ ,  $\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ . b) integrando por partes,  $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$ . c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = +\infty$ . d) por inducción usando  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ . e) también por inducción:  $\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!(2n+1)}{2^{2n}n!2} \sqrt{\pi} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!} \sqrt{\pi}$ .

**Problema 3.1.2** a)  $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ ; b.i)  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}(s-3)^{-3/2}$ ; b.ii)  $\sqrt{\frac{\pi}{s-1}}$ .

**Problema 3.1.3** a)  $L(e^{-at}f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-at}f(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(a+s)t} dt = L(f)(s+a)$ . b)  $L(f(at))(s) = \int_0^\infty f(at)e^{-st} dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(z)e^{-sz/a} dz = \frac{1}{a} L(f(t))\left(\frac{s}{a}\right)$ .

**Problema 3.1.4** i)  $\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{8}{s^3} + \frac{18}{s^4}$ ,  $s > 0$ ; ii)  $\frac{1}{(s-a)^2}$ ,  $s > a$ ; iii)  $\sqrt{\frac{\pi}{s-1}}$ ,  $s > 1$ ; iv)  $\frac{\Gamma(b+1)}{(s-a)^{b+1}}$ ,  $s > a$ ; v)  $\frac{3}{s-2} + \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{12}{(s-1)^4}$ ,  $s > 2$ ; vi)  $\frac{a}{s^2+a^2}$ ,  $s > 0$ ; vii)  $\frac{s}{s^2+a^2}$ ,  $s > 0$ ; viii)  $\frac{s+a}{b^2+(s+a)^2}$ ,  $s > -a$ ; ix)  $\frac{b}{b^2+(s+a)^2}$ ,  $s > -a$ ; x)  $\frac{2}{s(s^2+4)}$ ,  $s > 0$ ; xi)  $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$ ,  $s > 0$ ; xii)  $\frac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}$ ,  $s > 0$ ; xiii)  $\frac{s^3+7s}{(s^2+1)(s^2+9)}$ ,  $s > 0$ .

**Problema 3.1.5** a)  $\frac{d}{ds}[L(f)(s)] = \int_0^\infty f(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt = \int_0^\infty (-t)f(t)e^{-st} dt = L(-tf(t))(s)$ ; b) por inducción,  $\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}[L(f)(s)] = \frac{d}{ds} L((-t)^n f(t))(s) = L((-t)^{n+1} f(t))(s)$ .

**Problema 3.1.6** i)  $-\frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s^2+a^2} \right) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ ,  $s > 0$ ; ii)  $\frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{a}{s^2+a^2} \right) = \frac{6as^2-2a^3}{(s^2+a^2)^3}$ ,  $s > 0$ .

**Problema 3.1.7** i)  $L(f(t-a)H(t-a)) = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st} dt = \int_0^\infty f(z)e^{-sz-sa} dz = e^{-as}L(f(t))(s)$ ; ii) utilizando que  $t^3 = (t-3)^3 + 6(t-3) + 9$ , queda  $\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right)e^{-3s}$ .

**Problema 3.1.8** i)  $L^{-1}\left(\frac{1/2}{s-1} - \frac{1/2}{s+1}\right) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$ ; ii)  $x e^{-x}$ ; iii)  $L^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right) = 1 - (x+1)e^{-x}$ ; iv)  $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ ; v)  $L^{-1}\left(\frac{-1/2}{s-1} + \frac{1/2}{(s-1)^2} + \frac{s/2}{s^2+1}\right) = \frac{1}{2}((x-1)e^x + \cos x)$ ; vi)  $L^{-1}\left(\frac{4}{s+4} - \frac{4}{(s+4)^2}\right) =$

$4(1-x)e^{-4x}$ ; vii)  $\cos(a(x-\pi/2))H(x-\pi/2)$ , es decir  $\cos(a(x-\pi/2))$  si  $x \geq \pi/2$ , 0 si  $x < \pi/2$ ;  
 viii)  $\frac{1}{\sqrt{\pi x}}$ ; ix)  $L^{-1}\left(\frac{-1}{s^2} + \frac{1/2}{s-1} - \frac{1/2}{s+1}\right) = -x + \sinh x$ ;  
 x)  $L^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+9} + \frac{2}{(s+1)^2+9} + e^{-2s}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\right)\right) = (\cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x)e^{-x} + (e^{-2(x-2)} - e^{-3(x-2)})H(x-2)$ .

**Problema 3.1.9** Como  $g'(x) = f(x)$  y  $g(0) = 0$ , se tiene  $L(f)(s) = sL(g)(s)$ .

**Problema 3.1.10**  $-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}L(\sin bt)(s+a)\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{b}{s((s+a)^2+b^2)}\right) = \frac{b(3s^2+4as+a^2+b^2)}{s^2((s+a)^2+b^2)^2}$ .

**Problema 3.1.11**

a)  $L(f)(s) = \int_0^P e^{-st}f(t) dt + \int_P^\infty e^{-st}f(t) dt = \int_0^P e^{-st}f(t) dt + e^{-sP} \int_0^\infty e^{-sz}f(z) dz$   
 $= \int_0^P e^{-st}f(t) dt + e^{-sP}L(f)(s)$ ;

b.i)  $\frac{1}{1-e^{-s}} \int_0^1 te^{-st} dt = \frac{e^s - s - 1}{s^2(e^s - 1)}$ ; b.ii)  $\frac{1}{1-e^{-2s}} \left(\int_0^1 e^{-st} dt - \int_1^2 e^{-st} dt\right) = \frac{e^s - 1}{s(e^s + 1)}$ .

### 3.2. Ecuaciones y sistemas lineales.

**Problema 3.2.1** i)  $sY(s) - 1 - 3Y(s) = \frac{1}{s-2} \rightsquigarrow Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-2} \rightsquigarrow$

$y(t) = 2e^{3t} - e^{2t}$ ; ii)  $Y(s) = \frac{2}{(s+3)(s^2+4)} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{13}(2e^{-3t} - 2\cos 2t + 3\sin 2t)$ ;

iii)  $Y(s) = \frac{s^2+2s+9}{2(s-5)(s^2+9)} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{34}(22e^{5t} - 5\cos 3t + 3\sin 3t)$ ;

iv)  $Y(s) = \frac{s-3}{2(s-5)^2} \rightsquigarrow y(t) = (t + \frac{1}{2})e^{5t}$ ;

v)  $Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)^3} \rightsquigarrow y(t) = (t + \frac{t^2}{2})e^{-t}$ ;

vi)  $Y(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})$ ;

vii)  $Y(s) = \frac{s^2+s+1}{(s^2+1)(s^2+16)} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{15}(\cos t - \cos 4t) + \frac{1}{4}\sin 4t$ ;

viii)  $Y(s) = \frac{s^2+5s+7}{(s+1)^2(s+3)} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{4}(e^{-3t} + 3e^{-t} + 6te^{-t})$ ;

ix)  $Y(s) = \frac{2(s-3)^4+2}{(s-3)^5} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{12}(24+t^4)e^{3t}$ ;

x)  $Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{6}(1+2e^{-t} - 3e^{-2t}\cos(\sqrt{2}t) - 2\sqrt{2}e^{-2t}\sin(\sqrt{2}t))$ ;

xi)  $Y(s) = \frac{1}{s(s^2-2s+2)} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{2}[1 - e^t(\cos t - \sin t)]$ ;

xii)  $Y(s) = \frac{1}{s^2-2s+2} \rightsquigarrow y(t) = e^t \sin t$ .

**Problema 3.2.2** i)  $y(t) = e^{-2t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) + Ae^{-t} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{10}[2e^{-t} - e^{-2t}(2\cos 2t + \sin 2t)]$ , o también  $Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+8)} \rightsquigarrow y(t) = \dots$ ;

ii)  $y(t) = e^x(c_1 + c_2x) + A + (Bx + C)e^{2x} \rightsquigarrow y(x) = 1 + e^x(2x + 1) + e^{2x}(x - 2)$ , o también  
 $Y(s) = \frac{s^2 - 3s + 4}{s(s-2)^2(s-1)^2} \rightsquigarrow y(t) = \dots$ .

**Problema 3.2.3** i)  $Y(s) = \frac{s^2 - 4s + 3}{s(s^3 - 4s^2 - 5s)} \rightsquigarrow y(t) = \frac{4}{75}e^{5t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{96}{75} - \frac{3t}{5}$ ;

ii)  $X(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 - 6s} \rightsquigarrow x(t) = -\frac{1}{10}e^{2t} + \frac{1}{15}e^{-3t} - \frac{1}{6}$ .

**Problema 3.2.4**  $Y(s) = \frac{s^2 + s + 16}{(s^2 + 16)^2} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{8}[(2 + t) \operatorname{sen} 4t]$ .

**Problema 3.2.5**  $X(s) = \frac{k\omega}{(s^2 + \omega)(s^2 + \omega_0)} \rightsquigarrow x(t) = \frac{k}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0 \operatorname{sen} \omega t - \omega \operatorname{sen} \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2}$  si  $\omega \neq \omega_0$ ;  
 $x(t) = \frac{k}{2\omega_0^2}(\operatorname{sen} \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t)$  si  $\omega = \omega_0$ .

**Problema 3.2.6**  $F(s) = \frac{2 - s + 2s^2 - s^3}{s^2(s^2 + 1)} \rightsquigarrow f(x) = 2x - 1$ . O también, derivando se obtiene el problema  $\begin{cases} f'' + f = 2x - 1 \\ f(0) = -1, f'(0) = 2, \end{cases}$  cuya solución general es  $f(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + Ax + B$ , obteniendo  $c_1 = c_2 = 0, A = 2, B = -1$ .

**Problema 3.2.7** i)  $\begin{cases} sX = 4X - Y \\ sY - 1 = 2X + Y \end{cases} \rightsquigarrow X(s) = -\frac{1}{s^2 - 5s + 6} \rightsquigarrow x(t) = -e^{3t} + e^{2t} \rightsquigarrow$

$y(t) = -e^{3t} + 2e^{2t}$ ;

ii)  $x(t) = 4te^{3t}, y(t) = (1 - 2t)e^{3t}$ ;

iii)  $x(t) = e^{-t}(\cos \sqrt{2}t - \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t), y(t) = e^{-t}(2 \cos \sqrt{2}t + \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t)$ ;

iv)  $x(t) = \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3t, y(t) = 1 + \frac{1}{3}(\operatorname{sen} 3t - 3 \cos 3t)$ ;

v)  $x(t) = y(t) = 1 - t$ .

vi)  $x(t) = e^{2t} \operatorname{senh} t, y(t) = e^{2t} \operatorname{cosh} t$ .

vii)  $x(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t}, y(t) = \frac{2}{3}e^{5t} - \frac{2}{3}e^{-t}$ .

viii)  $x(t) = e^{-3t}(2 \cos 2t - \operatorname{sen} 2t), y(t) = e^{-3t}(-\cos 2t - 2 \operatorname{sen} 2t)$ .

ix)  $x(t) = \frac{1}{15}(9e^{2t} - 5e^{3t} - 4e^{-3t}), y(t) = \frac{2}{15}(3e^{2t} - 5e^{3t} + 2e^{-3t})$ .

**Problema 3.2.8** i)  $\begin{cases} x'' - 2x' + x = 0 \\ x(0) = 0, x'(0) = -8 \end{cases} \rightsquigarrow x(t) = -8te^t \rightsquigarrow y(t) = 2e^t - 4te^t$ ;

ii)  $\begin{cases} x'' - 7x' + 12x = -12e^t \\ x(0) = -1, x'(0) = 2 \end{cases} \rightsquigarrow x(t) = -2e^t + e^{4t} \rightsquigarrow y(t) = \frac{2}{3}(e^{4t} - e^t)$ .

**Problema 3.2.9**  $F(s) = \frac{4}{s^2} + \frac{F(s)}{s^2 + 1} \rightsquigarrow F(s) = \frac{4(s^2 + 1)}{s^4} \rightsquigarrow f(t) = 4t + \frac{2}{3}t^3$ .

**Problema 3.2.10**  $sF(s) = -1 = \frac{1}{s} - \frac{F(s)}{s+2} \rightsquigarrow F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)} \rightsquigarrow f(x) = 2 - e^{-x}$ .

**Problema 3.2.11**  $1 - \frac{1}{4}f'(x) = \int_0^x f(u) du \rightsquigarrow -\frac{1}{4}f'' = f \Rightarrow f'' + 4f = 0$ . Hallamos los dos datos iniciales sustituyendo en la ecuación dada y en la primera derivada,  $f(0) = 0, f'(0) = 4$ .

La solución es entonces  $f(x) = 2 \operatorname{sen} 2x$ . Alternativamente, transformando por Laplace se puede convertir en una ecuación algebraica, utilizando la convolución,  $\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}F(s) = \frac{F(s)}{s^2} \rightsquigarrow F(s) = \frac{4}{s^2 + 4}$ .

**Problema 3.2.12** *i*) El término independiente es  $f(t) = t + 1 - 2(t - 1)H(t - 1)$ ; la ecuación transformada es  $(s^2 + s)Y = -1 - s + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s}$ ; la solución es  $y(t) = \frac{t^2}{2} - 1 - (t^2 - 4t + 5 - 2e^{1-t})H(t - 1)$ . *ii*) El término independiente es  $f(t) = \cos 2t - \cos(2(t - 2\pi))H(t - 2\pi)$ ; la ecuación transformada es  $(s^2 + 4)Y = \frac{s}{s^2 + 4}(1 - e^{-2\pi s})$ ; la solución es  $y(t) = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t (t - (t - 2\pi)H(t - 2\pi))$ .

**Problema 3.2.13** El término independiente es  $f(t) = e^{\pi/2}e^{t-\pi/2}H(t - \pi/2) - e^{\pi}e^{t-\pi}H(t - \pi)$ ; la ecuación transformada es  $(s^2 - 1)X = \frac{1}{s - 1}(e^{\pi/2}e^{-\pi s/2} - e^{\pi}e^{-\pi s})$ ; la solución es  $x(t) = \frac{1}{4}(e^{\pi-t} - e^t + 2(t - \pi/2)e^t)H(t - \pi/2) - \frac{1}{4}(e^{2\pi-t} - e^t + 2(t - \pi)e^t)H(t - \pi)$ .

**Problema 3.2.14** *i*)  $s^2Y(s) = e^{-as} \rightsquigarrow y(t) = (t - a)H(t - a)$ . *ii*)  $Y(s) = \frac{e^{-s} + e^{-2s}}{s + 8} \rightsquigarrow y(t) = e^{-8(t-1)}H(t - 1) + e^{-8(t-2)}H(t - 2)$ . *iii*)  $Y(s) = \frac{1 + 4e^{-3\pi s/2}}{s^2 + 1} \rightsquigarrow y(t) = \operatorname{sen} t + 4 \operatorname{sen}(t - 3\pi/2)H(t - 3\pi/2) = \operatorname{sen} t + 4 \cos t H(t - 3\pi/2)$ . *iv*)  $Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1} \rightsquigarrow y(t) = 1 + \operatorname{sen}(t - 2\pi)H(t - 2\pi) = 1 + \operatorname{sen} t H(t - 2\pi)$ .

**Problema 3.2.15** *i*)  $Y(s) = \frac{E_0}{Ls + R} \rightsquigarrow I(t) = \frac{E_0}{L}e^{-Rt/L}$ ; *ii*)  $Y(s) = \frac{E_0}{(Ls + R)(s^2 + \omega^2)} \rightsquigarrow I(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2} (R \operatorname{sen} \omega t - L\omega \cos \omega t + L\omega e^{-Rt/L})$ .

- A<sub>3</sub>P-  
- ERC-

