

**uc3m**

Universidad **Carlos III** de Madrid

Departamento de Matemáticas

## CÁLCULO III. Resolución Problemas

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 5

Arturo de Pablo  
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M  
<http://ocw.uc3m.es/matematicas>



## 5. Problemas de Sturm-Liouville

### 5.1. Autovalores y autofunciones

**Problema 5.1.1** *i)*  $\lambda_n = n^2\pi^2$ ,  $n \geq 1$ ,  $\varphi_n(x) = \text{sen}(n\pi x)$ . *ii)*  $\lambda_n = n^2\pi^2$ ,  $n \geq 0$ ,  $\varphi_n(x) = \cos(n\pi x)$ . *iii)*  $\lambda_n = (n + 1/2)^2\pi^2$ ,  $n \geq 0$ ,  $\varphi_n(x) = \text{sen}((n + 1/2)\pi x)$ .

**Problema 5.1.2** *i)*  $\lambda_n = n^2\pi^2 - 3/4$ ,  $n \geq 1$ ,  $y_n(x) = e^{-x/2} \text{sen}(n\pi x)$ . *ii)*  $\lambda_0 = -1$ ,  $y_0(x) = 1$ ;  $\lambda_n = (4n^2\pi^2 - 3)/12$ ,  $n \geq 1$ ,  $y_n(x) = e^{3x/2}(\text{sen}(n\pi x) - \frac{2n\pi}{3} \cos(n\pi x))$ . *iii)*  $\lambda_0 = 0$ ,  $y_0(x) = xe^{-x}$ ;  $\lambda_n = -\mu_n^2$ ,  $n \geq 1$ , donde  $\mu_n = n$ -ésimo cero positivo de la función  $f(x) = \text{tg } x - x$ ,  $y_n(x) = e^{-x} \text{sen}(\mu_n x)$ .

### Problema 5.1.3

$$\lambda = \frac{\int_0^1 (\phi')^2 + \int_0^1 x^2 \phi^2}{\int_0^1 \phi^2} \geq 0$$

Si  $\lambda = 0$  se tiene  $x^2\phi^2 = 0 \Rightarrow \phi = 0$ . Así  $\lambda = 0$  no es autovalor.

**Problema 5.1.4** *i)* Tomamos como función test  $\phi(x) = 1 - x^2$ , que verifica  $\phi'(0) = \phi(1) = 0$ . Así

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 (\phi')^2 + \int_0^1 x^2 \phi^2}{\int_0^1 \phi^2} = \frac{37}{14} \approx 2,64$$

(Tomando  $\phi(x) = \cos(\pi x/2)$  la cota es mejor,  $\lambda_1 \leq \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \approx 2,59$ ). *ii)* Con  $\phi(x) = x^2 - 2$ ,

$$\lambda_1 \leq \frac{-[\phi\phi']_0^1 + \int_0^1 (\phi')^2 + \int_0^1 x\phi^2}{\int_0^1 \phi^2} = \frac{135}{106}.$$

*iii)* Con  $\phi(x) = 2x^2 - 3x$ ,

$$\lambda_1 \leq \frac{-[\phi\phi']_0^1 + \int_0^1 (\phi')^2}{\int_0^1 \phi^2} = \frac{25}{6}.$$

### 5.2. Series generalizadas de Fourier

#### Problema 5.2.1

a) Poniendo  $u(x, t) = X(x)T(t)$  se tiene la ecuación para la variable espacial  $kX'' - V_0X' + \lambda X = 0$ , que no es de tipo Sturm-Liouville.

b) Se tiene el desarrollo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{V_0 x/2k} \text{sen}(n\pi x/L) e^{-(\frac{V_0^2}{4k} + \frac{k n^2 \pi^2}{L^2})t}.$$

El dato inicial implica  $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L (f(x)e^{-V_0x/2k}) \operatorname{sen}(n\pi x/L) dx$ .

**Problema 5.2.2** Igualando coeficientes se tiene  $H = p$ ,  $\alpha H = p'$ , que implica  $H(x) = e^{\int^x \alpha(s) ds}$ .

**Problema 5.2.3**

a) Con  $H(x) = 1/x$  se tiene  $(x\phi')' + \frac{\lambda}{x}\phi = 0$ .

b) Para cada par  $(\varphi, \lambda)$  se tiene  $\lambda = \frac{\int_0^b (\varphi')^2 x dx}{\int_1^b \varphi^2 \frac{1}{x} dx} \geq 0$ . Si  $\lambda = 0$  se obtiene  $\varphi' = 0$ , que a su vez

lleva a  $\varphi = 0$ .

c)  $\lambda_n = n^2\pi^2/(\log b)^2$ ,  $n \geq 1$ ,  $\varphi_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi \log x/\log b)$ .

d) Las autofunciones son ortogonales con peso  $\sigma(x) = 1/x$ .

$$\int_1^b \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \log x}{\log b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi \log x}{\log b}\right) \frac{1}{x} dx = \frac{\log b}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}(n\pi z) \operatorname{sen}(m\pi z) dz = 0, \quad n \neq m.$$

e) Es claro que  $\operatorname{sen}(n\pi \log x/\log b) = 0$  en los puntos  $x = b^{m/n}$ ,  $m = 1, 2, \dots, n-1$ . (O también se puede ver que los ceros son  $x = b^z$ , donde  $z$  son los ceros de  $\operatorname{sen}(nz)$  en  $0 < z < \pi$ ).

**Problema 5.2.4**

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\eta_{0,n} r/a) e^{-(k\eta_{0,n}^2/a^2)t},$$

donde  $\eta_{0,n}$  es  $n$ -ésimo cero de la función de Bessel  $J_0$ , y los coeficientes se calculan por

$$a_n = \frac{\int_0^a f(r) J_0(\eta_{0,n} r/a) r dr}{\int_0^a J_0^2(\eta_{0,n} r/a) r dr}.$$

**Problema 5.2.5**

a) Representa la vibración de una cuerda sujeta por los extremos, con una fuerza de reacción  $\alpha u$ , si  $\alpha > 0$  (o de amortiguamiento si  $\alpha < 0$ ), y un rozamiento  $\beta \frac{\partial u}{\partial t}$  (si  $\beta < 0$ ) proporcional a la velocidad.

b) Poniendo  $u(x, t) = X(x)T(t)$  se tiene  $T_0 \frac{X''(x)}{\rho(x)X(x)} + \frac{\alpha(x)}{\rho(x)} = \frac{H''(t)}{H(t)} - \frac{\beta(x)H'(t)}{\rho(x)H(t)}$ . Necesitamos pues  $\beta(x)/\rho(x) = cte$ .

c) Sea  $\beta = c\rho$ . Las ecuaciones separadas son  $T_0 X'' + (\alpha + \lambda\rho)X = 0$ ,  $H'' - kH' + \lambda H = 0$ . Las soluciones de la parte temporal son, dependiendo de los valores de  $\lambda$  que resultasen de la ecuación espacial,

$$T(t) = \begin{cases} e^{kt/2} \left[ c_1 \operatorname{senh}(t\sqrt{k^2/4 - \lambda}) + c_2 \operatorname{cosh}(t\sqrt{k^2/4 - \lambda}) \right], & \text{si } \lambda < k^2/4, \\ e^{kt/2} (c_1 t + c_2), & \text{si } \lambda = k^2/4, \\ e^{kt/2} \left[ c_1 \operatorname{sen}(t\sqrt{\lambda - k^2/4}) + c_2 \operatorname{cos}(t\sqrt{\lambda - k^2/4}) \right], & \text{si } \lambda > k^2/4. \end{cases}$$

**Problema 5.2.6** Resolviendo la ecuación espacial obtenida al separar variables, se tiene  $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ ,  $n \geq 1$ ,  $X_n(x) = \text{sen}(n\pi x/L)$ . La ecuación temporal es  $T'' + aT' + (b + \lambda)T = 0$ . Su solución es diferente según los valores de  $\lambda$  en relación con  $a$  y  $b$ . Así, si  $\pi^2/L^2 > a^2/4 - b$ , la solución del problema del telegrafista es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-at/2} [A_n \text{sen}(w_n t) + B_n \cos(w_n t)] \text{sen}(n\pi x/L),$$

donde  $w_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \frac{a^2}{4} + b}$ , y los coeficientes son

$$A_n = \frac{aB_n}{2w_n}, \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \text{sen}(n\pi s/L) ds.$$

Si existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $M - 1 < \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} < M$ , la solución es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{M-1} e^{-at/2} [C_n \text{senh}(z_n t) + D_n \cosh(z_n t)] \text{sen}(n\pi x/L) \\ + \sum_{n=M}^{\infty} e^{-at/2} [A_n \text{sen}(w_n t) + B_n \cos(w_n t)] \text{sen}(n\pi x/L),$$

donde  $z_n = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b - \frac{n^2\pi^2}{L^2}}$ , y los nuevos coeficientes son

$$C_n = \frac{aD_n}{2z_n}, \quad D_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \text{sen}(n\pi s/L) ds.$$

Si existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = M$ , la solución es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{M-1} e^{-at/2} [C_n \text{senh}(z_n t) + D_n \cosh(z_n t)] \text{sen}(n\pi x/L) \\ + e^{-at/2} (E_M t + F_M) \text{sen}(M\pi x/L) \\ + \sum_{n=M+1}^{\infty} e^{-at/2} [A_n \text{sen}(w_n t) + B_n \cos(w_n t)] \text{sen}(n\pi x/L),$$

donde los nuevos coeficientes son

$$E_M = \frac{aF_M}{2}, \quad F_M = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \text{sen}(M\pi s/L) ds.$$

**Problema 5.2.7**

a)  $\lambda_{n,m} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{H^2}$ ,  $n \geq 0$ ,  $m \geq 1$ ,  $\varphi_{n,m}(x, y) = \cos(n\pi x/L) \text{sen}(m\pi y/H)$ .

b) Si  $L = H$ , se tiene  $\lambda_{n,m} = \lambda_{m,n}$ , mientras que  $\varphi_{n,m} \neq \varphi_{m,n}$  para todo  $n \neq m$ . Si  $L = 2H$  lo mismo ocurre con los pares  $(n, m)$  y  $(2m, n/2)$  para todo  $n \neq m$ .

c)

$$\int_0^L \int_0^H \varphi_{n,m} \varphi_{n',m'} dy dx = \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right) dx \cdot \int_0^H \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{H}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi y}{H}\right) dy,$$

que es cero siempre que  $n \neq n'$  ó  $m \neq m'$ .

**Problema 5.2.8**

a) Separando variables  $u(\vec{x}, t) = X(\vec{x})T(t)$  se obtienen los problemas

$$\begin{cases} \Delta X + \frac{\lambda}{c^2} X = 0, & \Omega, \\ X = 0, & \partial\Omega; \end{cases} \quad T'' + \lambda T = 0.$$

Sean  $(\phi, \lambda)$  y  $(\psi, \mu)$  dos pares de autofunciones y autovalores. Las ecuaciones correspondientes son  $\Delta\phi + \frac{\lambda}{c^2}\phi = 0$ ,  $\Delta\psi + \frac{\mu}{c^2}\psi = 0$ , Multiplicando la primera por  $\psi$  y la segunda por  $\phi$ , restando e integrando en  $\Omega$  se tiene, utilizando las condiciones de contorno,

$$0 = \int_{\Omega} (\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi) = (\lambda - \mu) \int_{\Omega} \phi\psi \frac{1}{c^2}.$$

Por tanto si  $\lambda \neq \mu$  se tiene que  $\phi$  y  $\psi$  son ortogonales con peso  $\sigma(\vec{x}) = \frac{1}{c^2(\vec{x})}$ .

b) Por el cociente de Rayleigh, para el par  $(\lambda, \varphi)$  se tiene  $\lambda = \frac{c^2 \int |\nabla\varphi|^2}{\int |\varphi|^2} \geq 0$ . Si  $\lambda = 0$

la correspondiente autofunción verifica  $\int |\nabla\varphi|^2 = 0$ , es decir, es constante; pero el dato frontera implica  $\varphi = 0$ .

c) Sean  $(\phi_n, \lambda_n)$ ,  $n \geq 1$ , los pares de autofunciones y autovalores. Resolviendo la ecuación temporal se tiene que la solución tendrá la forma

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \operatorname{sen}(\omega_n t) + B_n \operatorname{cos}(\omega_n t)] \phi_n(\vec{x}),$$

donde las frecuencias de vibración son  $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ .

**Problema 5.2.9**

a) Los autovalores de la ecuación espacial obtenida al separar variables son  $\lambda_{n,m} = \frac{\eta_{2n,m}^2}{a^2}$ ,  $n, m \geq 1$ , donde  $\eta_{2n,m}$  es  $m$ -ésimo cero de la función de Bessel  $J_{2n}$ . Por tanto las frecuencias de vibración son  $\omega_{n,m} = \frac{c\eta_{2n,m}}{a}$ .

b)

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1} \sum_{m=1} [A_{n,m} \operatorname{sen}(\omega_{n,m} t) + B_{n,m} \operatorname{cos}(\omega_{n,m} t)] \operatorname{sen}(2n\theta) J_{2n}(\eta_{2n,m} r/a),$$

donde los coeficientes son  $A_{n,m} = 0$  para todo  $m$ ,  $m \geq 1$ ,

$$B_{n,m} = \frac{4 \int_0^{\pi/2} \int_0^a g(r, \theta) \operatorname{sen}(2n\theta) J_{2n}(\eta_{2n,m}r/a) r \, dr d\theta}{\pi \int_0^a J_{2n}^2(\eta_{2n,m}r/a) r \, dr}.$$

**Problema 5.2.10** Como la ecuación y los datos son independientes de  $\theta$  y el dominio es invariante por rotaciones alrededor del eje vertical  $z$ , la solución no dependerá de  $\theta$ . Separamos variables entonces en  $(r, z, t)$  y la solución es

$$u(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \operatorname{sen}(n\pi z/H) J_0(\eta_{0,m}r/a) e^{-\lambda_{n,m}kt},$$

donde  $\lambda_{n,m} = \frac{n^2\pi^2}{H^2} + \frac{\eta_{0,m}^2}{a^2}$ , siendo  $\eta_{0,m} = m$ -ésimo cero de la función de Bessel  $J_0$ , y los coeficientes son

$$a_{n,m} = \frac{\frac{2}{H} \int_0^H \int_0^a f(r, z) \operatorname{sen}(n\pi z/H) J_0(\eta_{0,m}r/a) r \, dr dz}{\int_0^a J_0^2(\eta_{0,m}r/a) r \, dr}.$$

**Problema 5.2.11** Separamos variables en  $(r, \theta, z, t)$  y sólo hay que tener cuidado con la aparición de soluciones constantes en algunos casos por la condición Neumann en la frontera. La solución es

$$u(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi z/H) \left[ A_{n,0,0} e^{-\lambda_{n,0,0}kt} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{n,m,p} \cos(2m\theta) J_{2m}(\nu_{2m,p}r/a) e^{-\lambda_{n,m,p}kt} \right],$$

donde

$$\lambda_{n,m,p} = \begin{cases} \frac{n^2\pi^2}{H^2} + 4m^2 + \frac{\nu_{2m,p}^2}{a^2}, & n \geq 0, m \geq 0, p \geq 1, \\ \frac{n^2\pi^2}{H^2}, & n \geq 0, m = p = 0, \end{cases}$$

siendo  $\nu_{2m,p} = p$ -ésimo cero de la función  $J'_{2m}$ . Claramente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(r, \theta, z, t) = A_{0,0,0} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f = \frac{4}{\pi a^2 H} \int_0^H \int_0^{\pi/2} \int_0^a f(r, \theta, z) r \, dr d\theta dz.$$