uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Problemas

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 1

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

Índice

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden **3**
1.1. Métodos elementales de resolución 3
1.2. Aplicaciones 6

2. Ecuaciones lineales de orden superior **9**
2.1. Ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes 9
2.2. Aplicaciones 10

3. Transformada de Laplace **13**
3.1. Propiedades de la transformada de Laplace 13
3.2. Ecuaciones y sistemas lineales. 15

4. Método de separación de variables **19**
4.1. Separación de variables 19
4.2. Series de Fourier 22

5. Problemas de Sturm-Liouville **25**
5.1. Autovalores y autofunciones 25
5.2. Series generalizadas de Fourier 25

6. Transformada de Fourier **30**
6.1. Propiedades básicas 30
6.2. Transformación de ecuaciones 31

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1. Métodos elementales de resolución

Problema 1.1.1 Expresa mediante ecuaciones diferenciales los siguientes principios físicos.

a) La velocidad a la que se desintegra una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia N.

b) La población P de una ciudad aumenta a una velocidad proporcional a la población y a la diferencia entre una población fijada P_0 y la población actual.

c) La velocidad de cambio de presión de vapor P de una cierta sustancia respecto a la temperatura T es proporcional a la presión e inversamente proporcional al cuadrado de la temperatura.

d) La fuerza es igual a la masa por la aceleración.

Problema 1.1.2 Halla la ecuación diferencial que satisface la familia de curvas que se indica.

a) Las parábolas de ecuación $y = cx + x^2$.

b) Las rectas de ecuación $y = cx + c^2$.

c) Las circunferencias del plano con centro en algún punto del eje X.

d) Las curvas de ecuación $y = \dfrac{1 + ce^{2x}}{1 - ce^{2x}}$.

e) Las cardioides $r = a(1 - \cos\theta)$.

Problema 1.1.3 Halla la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales mediante separación de variables.

i) $dy = e^{3x-2y}\,dx\,,$

ii) $xyy' = (x+1)(y+1)\,,$

iii) $e^x yy' = e^{-y} + e^{-2x-y}\,,$

iv) $(4y + yx^2)\,dy3 - (2x + xy^2)\,dx = 0\,,$

v) $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)\,dy = y^2\,dx\,,$

vi) $2y' - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2x}{y}\,,$

vii) $y' = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}\,,$

viii) $y' = \dfrac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3},$

ix) $y'\sec y + \operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}(x + y)\,,$

x) $y' + xy = y\,.$

Problema 1.1.4 Halla la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas.

i) $(x^2 - 2y^2)\,dx + xy\,dy = 0\,,$

ii) $x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0\,,$

iii) $x^2y' = xy + 3(x^2 + y^2)\arctan\dfrac{y}{x}\,,$

iv) $xy'\operatorname{sen}\dfrac{y}{x} = x + y\operatorname{sen}\dfrac{y}{x}\,,$

v) $xy' = y + 2xe^{-y/x}\,,$

vi) $-y\,dx + (x + \sqrt{xy})\,dy = 0\,,$

vii) $(5y^4 + 2x^3y)\,dx = x(x^3 + 4y^3)\,dy\,,$

viii) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}\,,$

ix) $y\dfrac{dx}{dy} = x + 4ye^{-2x/y}\,,$

x) $\left(y + x\operatorname{cotg}\dfrac{y}{x}\right)dx = x\,dy\,.$

Problema 1.1.5

a) Dada la ecuación $y' = f\Big(\dfrac{Ax+By+C}{Dx+Ey+F}\Big)$, si $AE \neq BD$ demuestra que existe una traslación $w = x - x_0$, $z = y - y_0$, que reduce la ecuación a una ecuación homogénea.

b) Si $AE = BD$ en la ecuación anterior, averigua qué cambio de variable reduce la ecuación a otra de variables separadas.

Problema 1.1.6 Aplica el problema anterior para resolver las siguientes ecuaciones.

$$i)\quad y' = (2x+2y+4)^2\,, \qquad ii)\quad y' = \cos(x-y+5)\,,$$

$$iii)\quad y' = \frac{x+y+4}{x-y-6}\,, \qquad iv)\quad y' = \frac{x+y+4}{x+y-6}\,.$$

Problema 1.1.7 Determina si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas. En caso afirmativo halla su solución general.

$$i)\quad (\operatorname{sen} x \tan y + 1)\,dx + \cos x \sec^2 y\,dy = 0\,, \qquad ii)\quad (y - x^3)\,dx + (x + y^3)\,dy = 0\,,$$

$$iii)\quad (2y^2 - 4x - 5)\,dx = (4 - 2y + 4xy)\,dy\,, \qquad iv)\quad \frac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3}\,dx + \frac{8y^2 - x^2}{4y^3 - x^2 y}\,dy = 0\,,$$

$$v)\quad (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xe^y)\,dy = (e^y + \cos x \cos y)\,dx\,, \qquad vi)\quad (1+y)\,dx + (1-x)\,dy = 0\,,$$

$$vii)\quad (2xy^3 + y\cos x)\,dx + (3x^2y^2 + \operatorname{sen} x)\,dy = 0\,, \qquad viii)\quad dx = \frac{y}{1 - x^2y^2}\,dx + \frac{x}{1 - x^2y^2}\,dy\,,$$

$$ix)\quad (xy^2 + 3x^2y)\,dx + (x^3 + x^2y)\,dy = 0\,.$$

Problema 1.1.8 Sea $f(y)$ una función diferenciable y distinta de cero y consideremos la ecuación

$$f(y)\,dx - (x+y)\,dy = 0.$$

a) Determina para qué funciones $f(y)$ la ecuación es exacta.

b) Calcula un factor integrante de la forma $\mu(y)$ en términos de $f(y)$.

c) Resuelve la ecuación si $f(y) = y$.

Problema 1.1.9 Resuelve las ecuaciones siguientes encontrando un factor integrante que dependa de una sola variable.

$$i)\quad (4x + 3y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0, \qquad ii)\quad (4xy^2 + y)\,dx + (6y^3 - x)\,dy = 0,$$

$$iii)\quad 2x\,dx + x^2 \operatorname{cotg} y\,dy = 0, \qquad iv)\quad (y^2 + 2xy)\,dx - x^2\,dy = 0,$$

$$v)\quad y^2 \cos x\,dx + (4 + 5y \operatorname{sen} x)\,dy = 0, \qquad vi)\quad 6x^3 y\,dx + x^4\,dy = 0.$$

Problema 1.1.10 Resuelve la ecuación $(7x^4y - 3y^8) + (2x^5 - 9xy^7)y' = 0$ encontrando un factor integrante de la forma $x^n y^m$.

Problema 1.1.11 Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

i) $xy' - 3y = x^4\,,$ *ii)* $y' + y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}\,,$

iii) $(1+x^2)\,dy + 2xy\,dx = \operatorname{cotg} x\,dx\,,$ *iv)* $y' + y = 2xe^{-x} + x^2\,,$

v) $y' + y\operatorname{cotg} x = 2x\operatorname{cosec} x\,,$ *vi)* $(2y - x^3)\,dx = x\,dy\,,$

vii) $y - x + xy\operatorname{cotg} x + xy' = 0\,,$ *viii)* $\dfrac{dx}{dy} - 2xy = 6ye^{y^2}.$

Indicación: *viii)* Esta ecuación es lineal si se considera x como variable dependiente, $x = x(y)$.

Problema 1.1.12 Resuelve las siguientes ecuaciones de tipo Bernoulli.

i) $xy' + y = xy^2,$ *ii)* $xy' + y = x^4y^3,$

iii) $xy^2y' + y^3 = x\cos x,$ *iv)* $xy' = 6y + 12x^4y^{2/3},$

v) $y' - 5y = \dfrac{5}{2}xy^3.$

Problema 1.1.13 Resuelve por dos métodos distintos la ecuación $2x^2y - x^3y' = y^3$.

Problema 1.1.14 Demuestra que ecuaciones del tipo $y' + P(x)y = Q(x)y\log y$ se resuelven mediante la sustitución $z = \log y$. Aplica el método anterior a la ecuación

$$xy' = 2x^2y + y\log y\,.$$

Problema 1.1.15 Resuelve la ecuación:

$$(3x + 2y + y^2)\,dx + (x + 4xy + 5y^2)\,dy = 0$$

buscando un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = \phi(x+y^2)$.

Problema 1.1.16 Clasifica y resuelve las siguientes ecuaciones

i) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x^2}{y^2}\,;$ *ii)* $xy' + y = \operatorname{sen} 2x\,;$

iii) $(2y + yx^2)\,dy + (3x + xy^2)\,dx = 0\,;$ *iv)* $ye^{xy}\,dx + (xe^{xy} + \cos y)\,dy = 0\,;$

v) $3xy^2y' + y^3 = x\operatorname{sen} x\,;$ *vi)* $x^4yy' + \left(\dfrac{3}{2}y^2 + 1\right)x^3 = 1\,.$

Problema 1.1.17 Resuelve por reducción de orden las ecuaciones siguientes:

i) $x^2y'' + xy' = 0\,;$ *ii)* $yy'' - (y')^2 = 0\,;$

iii) $yy'' + (y')^2 = 0\,;$ *iv)* $xy'' = y' + (y')^3\,;$

v) $y'' - k^2y = 0\,;$ *vi)* $xy'' + y' = 4x\,.$

Problema 1.1.18 Resuelve la ecuación de Ricatti,

$$y' = 1 + x^2 + y^2 - 2xy,$$

sabiendo que una solución particular es $y_1(x) = x$.

Problema 1.1.19 Dada la ecuación de Ricatti,

$$y' = \frac{1}{3}x^2y^2 + \left(\frac{2}{x} - 2x^4\right)y + 3x^6,$$

resuélvela buscando una solución particular de la forma $y_1(x) = kx^\alpha$.

1.2. Aplicaciones

Problema 1.2.1 Comprueba que las siguientes familias de curvas son ortogonales.

$i)$ $\mathcal{C}_1 = \{y = c_1x\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{x^2 + y^2 = c_2\}$,

$ii)$ $\mathcal{C}_1 = \{y = c_1x^3\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{x^2 + 3y^2 = c_2\}$,

$iii)$ $\mathcal{C}_1 = \{x^2 + y^2 = 2c_1x\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{x^2 + y^2 = 2c_2y\}$.

Problema 1.2.2 Halla la familia de curvas ortogonales a cada una de las siguientes familias.

$i)$ $y = cx^2$ $\quad$ $ii)$ $cx^2 + y^2 = 1$ $\quad$ $iii)$ $y = ce^{-x}$

$iv)$ $y^2 = cx^3$ $\quad$ $v)$ $\operatorname{senh} y = cx$ $\quad$ $vi)$ $y = x/(1 + cx)$

$vii)$ $y = 1/\log(cx)$ $\quad$ $viii)$ $x^{1/3} + y^{1/3} = c$ $\quad$ $ix)$ $xy = c$

Problema 1.2.3 Halla las curvas tales que las distancias sobre la tangente desde el punto de tangencia a los puntos de corte con los ejes son iguales.

Problema 1.2.4 Determina una curva contenida en el primer cuadrante con la propiedad de que dado cualquier punto (x, y) de la curva, ésta divide al rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, y)$, $(x, 0)$, (x, y), en dos partes cuyas áreas están en la proporción 1:2.

Problema 1.2.5 El modelo logístico de crecimiento de una población viene regulado por la ecuación diferencial $P' = aP - bP^2$.

a) Determina la población en un instante t sabiendo que la población inicial es M.

b) Calcula la población de peces en un estanque el año 1998 sabiendo que se inició con 1.000 peces el año 1990 y se estimó que durante los años 1992 y 1994 era de 3.000 y 5.000 peces respectivamente.

c) ¿Cuál es la población de equilibrio a largo plazo?

Problema 1.2.6 Una bola de nieve se derrite de tal manera que la razón de cambio de su volumen es proporcional al área de su superficie. El diámetro de la bola de nieve es inicialmente de 4cm y al cabo de 30 minutos su diámetro pasa a ser de 3cm.

a) ¿Cuándo será su diámetro de 2cm?

b) ¿Cuándo desaparecerá la bola de nieve?

Problema 1.2.7 El radiocarbono ^{14}C de la madera viva se desintegra a un ritmo de 15,30 desintegraciones por minuto (dpm) por gramo de carbono. Tomando 5.600 años como semivida del ^{14}C, estima la edad de cada uno de los siguientes objetos descubiertos por los arqueólogos y analizados por la radiactividad en 1950.

a) Un fragmento de pata de silla de la tumba de Tutankhamón, hallada en el Valle de los Reyes (Egipto): $d =$10,14 dpm.

b) Una flecha encontrada en Leonard Rock Shelter (Nevada, USA): $d =$6,42 dpm.

c) Estiércol de un perezoso gigante hallado en la cueva Gypsum (Nevada, USA): $d =$4,17 dpm.

– $\mathcal{A}_{\delta}$P–
– $\mathcal{ERC}$–