uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Problemas

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 3

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

3. Transformada de Laplace

3.1. Propiedades de la transformada de Laplace

Problema 3.1.1 Demuestra las siguientes propiedades de la función *gamma*, definida como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt, \qquad x > 0.$$

a) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

b) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c) Deduce de lo anterior que $\lim_{x \to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

d) Si $n \in I\!N$, $\Gamma(n+1) = n!$.

e) Si $n \in I\!N$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$.

Indicación: para *a*) usa el valor $\displaystyle\int_0^\infty e^{-z^2}\, dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Problema 3.1.2

a) Expresa la transformada de Laplace de la función $f(x) = x^\alpha$, $(\alpha > -1)$, con ayuda de la función *Gamma*.

b) Halla la transformada de Laplace de las funciones

$$i)\ f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{3x}, \qquad ii)\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}.$$

Problema 3.1.3 Prueba las siguientes propiedades de la transformada de Laplace:

a) $L(\mathrm{e}^{-at} f(t))(s) = L(f)(s+a), \qquad a \in \mathbb{R}.$

b) $L(f(at))(s) = \frac{1}{a} L(f(t))\left(\frac{s}{a}\right), \qquad a > 0.$

Problema 3.1.4 Usando las propiedades anteriores calcula la transformada de Laplace de las funciones siguientes, indicando en cada caso su dominio.

i) $f(x) = 2 + x - 4x^2 + 3x^3$, *ii*) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{ax}$, $(a \in \mathbb{R})$,

iii) $f(x) = \mathrm{e}^x/\sqrt{x}$, *iv*) $f(x) = x^b \mathrm{e}^{ax}$, $(a \in \mathbb{R},\ b > -1)$,

v) $f(x) = 3\mathrm{e}^{2x} + x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x^3\mathrm{e}^x$, *vi*) $f(x) = \mathrm{sen}(ax)$, $(a \in \mathbb{R})$,

vii) $f(x) = \cos(ax)$, $(a \in \mathbb{R})$, *viii*) $f(x) = \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)$, $(a, b \in \mathbb{R})$,

ix) $f(x) = \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{sen}(bx)$, $(a, b \in \mathbb{R})$, *x*) $f(x) = \mathrm{sen}^2 x$,

xi) $f(x) = \cos^2 x$, *xii*) $f(x) = \mathrm{sen}^3 x$,

xiii) $f(x) = \cos^3 x$.

Indicación: *xii*) $4\,\mathrm{sen}^3 x = 3\,\mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}\, 3x$; *xiii*) $4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$.

Problema 3.1.5 Sea f una función continua en $[0,\infty)$ con crecimiento a lo sumo exponencial.

a) Suponiendo que se puede derivar bajo el signo integral, prueba que $L(f)$ es derivable y que

$$\frac{d}{ds}[L(f)(s)] = -L(t\, f(t))(s)\,.$$

b) Más aún, suponiendo que se puede derivar bajo el signo integral, prueba que $L(f)$ tiene derivadas de todos los órdenes y que

$$\frac{d^n}{ds^n}[L(f)(s)] = (-1)^n L(t^n f(t))(s)\,.$$

Problema 3.1.6 Halla la transformada de Laplace de las siguientes funciones, indicando en cada caso su dominio:

$$i)\ f(x) = x\cos(ax), \qquad ii)\ f(x) = x^2\,\mathrm{sen}(ax).$$

Problema 3.1.7 Definimos la función de Heaviside (o de salto) mediante

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

a) Prueba que

$$L(f(t-a)\,H(t-a)) = \mathrm{e}^{-as} L(f(t))(s), \qquad a \geq 0.$$

b) Calcula $L(g)(s)$ para

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 3, \\ t^2, & t > 3. \end{cases}$$

Indicación: para *b*) escribe t^2 en potencias de $(t-3)$.

Problema 3.1.8 Halla la función cuya transformada de Laplace es

$$i)\ \frac{1}{s^2-1}, \qquad ii)\ \frac{1}{(s+1)^2},$$

$$iii)\ \frac{1}{s(s+1)^2}, \qquad iv)\ \frac{1}{s^n}, \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$v)\ \frac{1}{(s-1)^2(s^2+1)}, \qquad vi)\ \frac{4s+12}{s^2+8s+16},$$

$$vii)\ \frac{s\,\mathrm{e}^{-\pi s/2}}{s^2+a^2}, \qquad viii)\ \frac{1}{\sqrt{s}},$$

$$ix)\ \frac{1}{s^4-s^2}, \qquad x)\ \frac{s+3}{(s+1)^2+9} + \frac{e^{-2s}}{s^2+5s+6}\,.$$

Problema 3.1.9 Prueba que si f es continua en $[0,\infty)$ y tiene crecimiento a lo sumo exponencial, entonces lo mismo es válido para la función $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, y que

$$L(g)(s) = \frac{1}{s}\,L(f)(s)\,.$$

Problema 3.1.10 Calcula la transformada de Laplace de la función

$$f(x) = x \int_0^x \mathrm{e}^{-at} \operatorname{sen}(bt)\, dt\,, \qquad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Problema 3.1.11 Sea $f : (0, \infty) \longrightarrow I\!R$ una función continua a trozos y con crecimiento a lo sumo exponencial.

a) Prueba que si f es periódica de período P, es decir tal que $f(x+P) = f(x)$ para todo $x > 0$, entonces

$$L(f)(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ps}} \int_0^P e^{-st} f(t)\, dt\,.$$

b) Como aplicación de la fórmula del apartado anterior, calcula la transformada de Laplace de:

i) $f(x) = x - [x]$, donde $[x]$ denota la parte entera de x;

ii) $f(x) = (-1)^{[x]}$.

Indicación: para *a*) divide la integral que define $L(f)$ en dos trozos, uno de 0 a P, y el otro de P hasta infinito.

3.2. Ecuaciones y sistemas lineales.

Problema 3.2.1 Resuelve los siguientes problemas de valor inicial

i) $\begin{cases} y' - 3y = \mathrm{e}^{2t}, \\ y(0) = 1; \end{cases}$ *ii*) $\begin{cases} y' + 3y = \operatorname{sen} 2t, \\ y(0) = 0; \end{cases}$

iii) $\begin{cases} y' - 5y = \cos 3t, \\ y(0) = 1/2; \end{cases}$ *iv*) $\begin{cases} y' - 5y = \mathrm{e}^{5t}, \\ y(0) = 1/2; \end{cases}$

v) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-t}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1; \end{cases}$ *vi*) $\begin{cases} y'' - y = \mathrm{e}^{2t}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1; \end{cases}$

vii) $\begin{cases} y'' + 16y = \cos t, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1; \end{cases}$ *viii*) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-3t}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \end{cases}$

ix) $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = t^2\mathrm{e}^{3t}, \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6; \end{cases}$ *x*) $\begin{cases} y'' + 4y' + 6y = 1 + \mathrm{e}^{-t}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0; \end{cases}$

xi) $\begin{cases} y'' - y' = e^t \cos t, \\ y(0) = y'(0) = 0; \end{cases}$ *xii*) $\begin{cases} y'' - 2y' + 3y = e^t \operatorname{sen} t, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

Problema 3.2.2 Resuelve por dos métodos distintos los problemas:

i) $\begin{cases} y'' + 4y' + 8y = e^{-t}, \\ y(0) = y'(0) = 0; \end{cases}$ *ii*) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 1 + xe^{2x}, \\ y(0) = y'(0) = 0\,. \end{cases}$

Problema 3.2.3 Resuelve los siguientes problemas de valor inicial, para $t > 0$:

$$i)\left\{\begin{array}{l} y'''(t) - 4y''(t) - 5y'(t) = 3, \\ y(0) = y''(0) = 0,\ y'(0) = 1; \end{array}\right.$$

$$ii)\left\{\begin{array}{l} x'''(t) + x''(t) - 6x'(t) = 0, \\ x(0) = x'(0) = 0,\ x''(0) = 1. \end{array}\right.$$

Problema 3.2.4 Resuelve el problema siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + 16y = \cos 4t, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{array}\right.$$

Indicación: Comprobar que $L^{-1}(\frac{s}{(s^2+a^2)^2}) = \frac{1}{2a} t \operatorname{sen}(at)$.

Problema 3.2.5 Resuelve, para $\omega \neq \omega_0$, el problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{l} x'' + \omega_0^2\, x = k \operatorname{sen} \omega t, \quad t > 0, \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{array}\right.$$

que describe las oscilaciones forzadas de una masa en un resorte no amortiguado. ¿Qué pasa si $\omega = \omega_0$?
Indicación: Comprobar que $L^{-1}(\frac{1}{(s^2+a^2)^2}) = \frac{1}{2a^3}(\operatorname{sen} at - at \cos at)$.

Problema 3.2.6 Encuentra la función $f(x)$ que satisface la condición inicial $f(0) = -1$ y la ecuación

$$f'(x) + \int_0^x f(t)\, dt = x^2 - x + 2.$$

Problema 3.2.7 Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales:

$$i)\left\{\begin{array}{l} x' = 4x - y, \\ y' = 2x + y, \\ x(0) = 0,\, y(0) = 1; \end{array}\right. \qquad ii)\left\{\begin{array}{l} x' = 5x + 4y, \\ y' = -x + y, \\ x(0) = 0,\, y(0) = 1. \end{array}\right. \qquad iii)\left\{\begin{array}{l} x' = -x - y, \\ y' = 2x - y, \\ x(0) = 1,\, y(0) = 2; \end{array}\right.$$

$$iv)\left\{\begin{array}{l} x' = x - 2y + 2, \\ y' = 5x - y + 1, \\ x(0) = y(0) = 0; \end{array}\right. \qquad v)\left\{\begin{array}{l} x' = x - 2y - t, \\ y' = 2x - 3y - t, \\ x(0) = y(0) = 1; \end{array}\right. \qquad vi)\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \\ x(0) = 0,\, y(0) = 1; \end{array}\right.$$

$$vii)\left\{\begin{array}{l} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y, \\ x(0) = 1,\, y(0) = 0; \end{array}\right. \qquad viii)\left\{\begin{array}{l} x' = -3x + 2y, \\ y' = -2x - 3y, \\ x(0) = 2,\, y(0) = -1; \end{array}\right. \qquad ix)\left\{\begin{array}{l} x' = -x + 2y + \mathrm{e}^{2t}, \\ y' = 4x + y - 2\mathrm{e}^{2t}, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{array}\right.$$

Problema 3.2.8 Resuelve los siguientes sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden conviertiéndolos cada uno en una ecuación de segundo orden.

$$i)\left\{\begin{array}{l} x' = 3x - 4y, \\ y' = x - y, \\ x(0) = 0,\, y(0) = 2; \end{array}\right. \qquad ii)\left\{\begin{array}{l} x' - 6x + 3y = 8\mathrm{e}^t, \\ y' - 2x - y = 4\mathrm{e}^t, \\ x(0) = -1,\, y(0) = 0. \end{array}\right.$$

Problema 3.2.9 Resuelve la ecuación integral usando la transformada de Laplace de la convolución:

$$f(t) = 4t + \int_0^t f(t-r)\operatorname{sen} r\,dr\,.$$

Problema 3.2.10 Resuelve la ecuación integro-diferencial:

$$f'(x) = 1 - \int_0^x f(x-r)\mathrm{e}^{-2r}dr, \quad f(0) = 1.$$

Problema 3.2.11 Derivando dos veces convierte la siguiente ecuación integro-diferencial en una EDO de segundo orden:

$$x - \frac{1}{4}f(x) = \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u.$$

Problema 3.2.12 Resuelve los problemas:

$$i) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' + y' = \left\{ \begin{array}{ll} t+1, & 0 < t < 1, \\ 3-t, & t > 1, \end{array} \right. \\ y(0) = -1,\, y'(0) = 0; \end{array} \right. \qquad ii) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' + 4y = \left\{ \begin{array}{ll} \cos 2t, & 0 < t < 2\pi, \\ 0, & t > 2\pi, \end{array} \right. \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{array} \right.$$

Problema 3.2.13 Resuelve el problema $\left\{ \begin{array}{l} x'' - x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{array} \right.$ donde $f(t) = \mathrm{e}^t$ si $\pi/2 < t < \pi$, $f(t) = 0$ en el resto.

Problema 3.2.14 Resuelve los problemas:

$$i) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' = \delta(t-a), \\ y(0) = 0,\, y'(0) = 0; \end{array} \right. \qquad ii) \quad \left\{ \begin{array}{l} y' + 8y = \delta(t-1) + \delta(t-2), \\ y(0) = 0; \end{array} \right.$$

$$iii) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' + y = 4\delta\Big(t - \frac{3}{2}\pi\Big), \\ y(0) = 0,\, y'(0) = 1; \end{array} \right. \qquad iv) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' + y = 1 + \delta(t-2\pi), \\ y(0) = 1,\, y'(0) = 0. \end{array} \right.$$

Problema 3.2.15 La corriente en un circuito eléctrico con inductancia L y resistencia R se encuentra dada por

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E\,.$$

donde E es la fuerza electromotriz aplicada. Si $I(0) = 0$, halla I en los casos siguientes: (E_0 es constante)

$$i)\ E(t) = E_0\delta(t), \qquad ii)\ E(t) = E_0\operatorname{sen}(\omega t).$$

– $\mathcal{A}_{\delta}$P–
– $\mathcal{ERC}$–