uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Problemas

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 4

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

4. Método de separación de variables

4.1. Separación de variables

Problema 4.1.1 Para cada una de las siguientes EDP's, determina las EDO's que se obtienen al aplicar el método de separación de variables:

$$i)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \qquad ii)\quad r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

$$iii)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v_0\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad iv)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$v)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right), \qquad vi)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$

$$vii)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(k, v_0 y c son constantes).

Problema 4.1.2 Resuelve por separación de variables el problema en el cuadrado $\{0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \\ u(x,\pi) = 0, \\ u(x,0) = 2\operatorname{sen} 3x. \end{cases}$$

Problema 4.1.3 Resuelve el problema en el cuadrado $\{0 < x < L,\ 0 < y < L\}$:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(L,y) = 0, \\ \varphi(x,0) = 0, \\ \varphi(x,L) = f(x). \end{cases}$$

Problema 4.1.4 Se considera la ecuación de Laplace en un rectángulo $\{0 < x < L, 0 < y < H\}$ con las condiciones de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,H) = f(x).$$

a) Obtén la condición de compatibilidad.

b) Resuelve el problema por el método de separación de variables. Demuestra que el método proporciona una solución solamente bajo la condición derivada en *a*).

c) La solución de la parte *b*) contiene una constante arbitraria. Determínala considerando la relación del problema propuesto con el de conducción del calor en el rectángulo partiendo de la condición inicial $u(x,y,0) = g(x,y)$.

Problema 4.1.5 Sea el problema correspondiente a la temperatura en un cilindro unidimensional con absorción si la temperatura exterior es 0 grados centígrados:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

a) ¿Cuáles son las posibles distribuciones de temperatura en equilibrio si $\alpha > 0$?

b) Resuelve el problema dependiente del tiempo. Analiza la temperatura para tiempos grandes $(t \to \infty)$ y compara con la solución del apartado anterior.

Problema 4.1.6 El caso $\alpha < 0$ en el problema anterior es más delicado. Resuelve los casos particulares $\alpha = -\dfrac{3\pi}{2L^2}$ y $\alpha = -\dfrac{2\pi}{L^2}$.

Problema 4.1.7 Se considera el problema de vibración de una cuerda sujeta por los extremos

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), & 0 < x < L, \end{cases}$$

donde $\rho > 0$ es la densidad constante de la cuerda y $T_0 > 0$ es la tensión de la misma.

a) Resuelve el problema por separación de variables y comprueba que se puede escribir como suma de *armónicos*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos[\omega_n(t - \delta_n)]\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_n}\,x)$$

identificando λ_n, ω_n, α_n y δ_n.

b) Calcula los puntos de máxima amplitud de cada armónico, llamados *antinodos*.

c) Calcula la *energía* de cada armónico

$$E_n = \frac{\rho}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial U_n}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{T_0}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)^2 dx,$$

y comprueba que es constante en el tiempo.

d) La situación de una cuerda estirada una longitud $A > 0$ por el centro y soltada posteriormente corresponde a los datos iniciales

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2A}{L}\,x, & 0 \le x \le \dfrac{L}{2}, \\ \dfrac{2A}{L}\,(L - x), & \dfrac{L}{2} \le x \le L, \end{cases} \qquad g(x) = 0.$$

Calcula la energía del *armónico fundamental*, es decir, calcula E_1.

e) Esta energía se corresponde con la intensidad del sonido, o volumen, producido por la vibración de la cuerda. Estudia su dependencia de los datos del problema: densidad, longitud, tensión y estiramiento inicial.

Problema 4.1.8

a) Demuestra que, dada cualquier solución del problema de Cauchy-Dirichlet anterior asociado a la ecuación de ondas, su energía total

$$E(t) = \frac{\rho}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{T_0}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx,$$

es constante en el tiempo. Para ello multiplica la ecuación de ondas por $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, integra en $[0, L]$ y deduce que $E'(t) = 0$.

b) Demuestra que este resultado implica unicidad de solución para dicho problema, pues la energía debe ser igual a la energía inicial.

Problema 4.1.9 Resuelve el problema para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \ , t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 8 \operatorname{sen}^2 x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Problema 4.1.10 Resuelve el problema para la ecuación amortiguada de ondas ($c > 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2c \dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \operatorname{sen} 2x, & 0 < x < \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Problema 4.1.11

a) Demuestra, separando variables en coordenadas polares, que la solución de la ecuación de Laplace en un disco, $D = \{0 < r < a, \ -\pi \leq \theta \leq \pi\}$,

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & D, \\ u = f, & \partial D, \end{cases}$$

es

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\theta - \phi) \right] d\phi.$$

b) Usando la relación $\cos z = \operatorname{Re}(e^{iz})$, suma la serie geométrica resultante hasta obtener la *Fórmula Integral de Poisson*.

c) Calcula el valor de u en el origen, obteniendo lo que se denomina *Teorema de la Media para funciones armónicas*.

Problema 4.1.12 Resuelve la ecuación de Laplace en el disco unidad con dato frontera $u(1,\theta) = \operatorname{sen}^3 \theta$.

Problema 4.1.13 Resuelve la ecuación de Laplace en un semicírculo $\{0 < r < a,\, 0 < \theta < \pi\}$, con las condiciones de contorno siguientes:

a) $u = 0$ sobre el diámetro y $u(a,\theta) = g(\theta)$.

b) El diámetro está aislado y $u(a,\theta) = g(\theta)$.

Problema 4.1.14 Resuelve la ecuación de Laplace en una cuña de 60°, $\{0 < r < a,\, 0 < \theta < \pi/3\}$, con las condiciones de contorno

$$u(r,0) = 0, \quad u(r,\pi/3) = 0, \quad u(a,\theta) = f(\theta).$$

Problema 4.1.15 Resuelve la ecuación de Laplace en un anillo circular $\{a < r < b\}$, con las condiciones de contorno siguientes:

$$i)\quad u(a,\theta) = f(\theta), \quad u(b,\theta) = 0; \qquad ii)\quad u(a,\theta) = f(\theta), \quad u(b,\theta) = g(\theta);$$

$$iii)\quad \frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = 0, \quad u(b,\theta) = g(\theta); \qquad iv)\quad \frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = f(\theta), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(b,\theta) = 0.$$

Si hay que imponer alguna condición de solubilidad, enúnciala y explícala físicamente.

Problema 4.1.16 Resuelve la ecuación de Laplace en un cuarto de anillo $\{a < r < b,\, 0 < \theta < \pi/2\}$, con las condiciones de contorno siguientes:

$$u(r,0) = u(r,\pi/2) = 0, \quad u(a,\theta) = 0, \quad u(b,\theta) = f(\theta).$$

4.2. Series de Fourier

Problema 4.2.1 Dibuja la serie de Fourier de $f(x)$ sobre el intervalo $[-L, L]$ para las funciones siguientes y compárala con la función $f(x)$:

$$i)\quad f(x) = x^2; \qquad ii)\quad f(x) = e^x;$$

$$iii)\quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x+1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Problema 4.2.2 Determina la serie de Fourier en senos de las siguientes funciones:

$$i)\quad f(x) = \pi - x,\ 0 \leq x \leq \pi; \qquad ii)\quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 2, & \pi/2 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$iii)\quad f(x) = x^2,\ 0 \leq x \leq \pi; \qquad iv)\quad f(x) = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi.$$

Problema 4.2.3 Sea $f(x)$ una función par alrededor de $x = L/2$.

a) Demuestra que los coeficientes impares (n impar) de su serie de Fourier en cosenos sobre el intervalo $[0, L]$ son cero.

b) Obtén la serie de Fourier en cosenos de $f(x)$ sobre el intervalo $[0, L/2]$.

Problema 4.2.4 Sea f una función impar y de periodo 2 tal que $f(x) = 1 - x$ si $0 \leq x \leq 1$. ¿Podemos derivar término a término la serie de Fourier en senos de $f(x)$ y obtener la serie de Fourier en cosenos de $f'(x)$? Explica la respuesta.

Problema 4.2.5 En este problema intentamos obtener los coeficientes de la serie de Fourier en cosenos de $f(x) = \mathrm{e}^x$. Encuentra los errores cometidos en el siguiente argumento:
Sea la serie de Fourier en cosenos $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}$. Derivando dos veces se tiene $e^x = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n \cos \frac{n\pi x}{L}$. Igualando las series deducimos $A_n = 0$ para todo $n \geq 0$, resultado que es *obviamente erróneo*. Corrige los errores cometidos y como consecuencia obtén A_n.

Problema 4.2.6 Obtén la serie de Fourier en senos de la función $\cosh x$ en $[0, L]$. derivando la serie dos veces.

– $\mathcal{A}_\delta$P–
– $\mathcal{ERC}$–