uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Problemas

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 6

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

6. Transformada de Fourier

6.1. Propiedades básicas

Problema 6.1.1

a) Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, demuestra que la función rescalada $g(x) = \alpha\, f(\alpha x)$, $\alpha > 0$, también tiene integral uno.

b) Calcula en ese caso la transformada de Fourier de g en términos de la transformada de Fourier de f y estudia su comportamiento según varía α: las funciones "anchas" tienen transformadas de Fourier con un pico estrecho cerca de $\omega = 0$ y viceversa.

c) Si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\,d\vec{x} = 1$, calcula el cambio de escala $g(\vec{x}) = \beta\, f(\alpha\vec{x})$ análogo al apartado *a*) para que g tenga también integral uno.

d) Calcula $\widehat{g}$ en términos de $\widehat{f}$.

Problema 6.1.2

a) Dados $x_0 \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, ¿para qué valores de α tiene área unidad la función $g(x) = \alpha\, e^{-\beta(x-x_0)^2}$ definida para $x \in I\!R$?

b) Demuestra que para ese valor de α se tiene $\displaystyle\lim_{\beta\to\infty} g(x) = 0$ para todo $x \neq x_0$.

c) Calcula en ese caso la transformada de Fourier de $g(x)$ y tomar el límite $\beta \to \infty$.

d) Usa las propiedades de integración de $\delta(x - x_0)$ para calcular su transformada de Fourier.

e) Comprueba que el núcleo de Gauss es una aproximación a la delta de Dirac para $t \to 0$.

Problema 6.1.3 Calcula la transformada de Fourier de la función $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$

Problema 6.1.4 Calcula la transformada de Fourier de la función $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|}$ y comprueba gráficamente lo dicho en el Problema 6.1.1.*b*).

Problema 6.1.5 Calcula la transformada de Fourier de Δf en términos de la transformada de Fourier de f.

Problema 6.1.6 Dada una función f, definimos $g = f * h$, donde $h(x) = f(-x)$. Escribiendo $g(0)$ de dos maneras distintas demuestra que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega$.

Problema 6.1.7 Dada una función f, definimos $u = g * f$, donde $\widehat{g}(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2+1}$. Calcula $-u'' + u$.

6.2. Transformación de ecuaciones

Problema 6.2.1 Dados la función f y el número real $\lambda > 0$, resuelve la ecuación $-u'' + \lambda^2 u = f$ mediante transformada de Fourier.

Problema 6.2.2

a) Usando los teoremas de convolución y de traslación resuelve mediante transformada de Fourier la ecuación de difusión con convección

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x}, & x \in I\!R, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in I\!R, \end{cases}$$

donde $k > 0$, $c \in \mathbb{R}$.

b) Sea $f(x) = \delta(x)$. Dibujar la solución correspondiente para distintos valores de $t > 0$. Discutir el significado de la convección $c\,\partial u/\partial x$.

c) ¿Sugiere la forma de la solución un cambio de variables que simplifique la ecuación?

Problema 6.2.3

a) Resuelve la ecuación de difusión con absorción

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u, & x \in I\!R, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in I\!R, \end{cases}$$

donde k, $\gamma > 0$.

b) ¿Sugiere la forma de la solución un cambio de variables que simplifique la ecuación?

Problema 6.2.4

a) Calcula, para $a > 0$ fijo, la transformada de Fourier de la función $f(x) = (a - |x|)_+$.

b) Resuelve mediante transformada de Fourier el problema para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x), & x \in I\!R, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & x \in I\!R. \end{cases}$$

Problema 6.2.5 Resuelve mediante transformada de Fourier en la variable y el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < L, \ y \in I\!R, \\ u(0,y) = g_1(y), & y \in I\!R, \\ u(L,y) = g_2(y), & y \in I\!R. \end{cases}$$

– $\mathcal{A}_\delta$P–
– $\mathcal{ERC}$–