UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Escuela Politécnica Superior
Departamento de Matemáticas

Cálculo III **Curso 2016-2017**

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales.

HOJA 1. **RESOLUCIÓN**

Ejercicio 1. Es homogénea. Poniendo $z = y/x$ tenemos $z' = \frac{1}{x}\left(y' - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{y}{x} + 2e^{-y/x} - \frac{y}{x}\right)$, que nos da la ecuación de variables separadas $z' = \dfrac{2}{x\,e^z}$. La solución es $e^z = 2\log x + c$, es decir, $z = \log(\log(kx^2))$, y finalmente $y(x) = x\log(\log(kx^2))$.

Ejercicio 2. Multipliquemos la ecuación por $\mu = \mu(x)$. La condición para que la nueva ecuación sea exacta es

$$\frac{\partial}{\partial y}((y^2\cos x)\mu) = \frac{\partial}{\partial x}((4+5y\operatorname{sen} x)\mu)$$

$$2y\cos x\mu = 5y\cos x\mu + (4+5y\operatorname{sen} x)\mu'$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-3y\cos x}{4+5y\operatorname{sen} x}$$

que es imposible, pues el miembro de la derecha no depende solo de x. Intentemos entonces $\mu = \mu(y)$. Tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}((y^2\cos x)\mu) = \frac{\partial}{\partial x}((4+5y\operatorname{sen} x)\mu)$$

$$2y\cos x\mu + y^2\cos x\mu' = 5y\cos x\mu$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{3}{y} \quad \rightsquigarrow \quad \mu(y) = y^3.$$

Para resolver la ecuación $y^5\cos x dx + (4+5y\operatorname{sen} x)y^3 dy = 0$, buscamos el potencial $\Phi(x,y)$ que verifique

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = y^5\cos x && \rightsquigarrow \quad \Phi(x,y) = y^5\operatorname{sen} x + g(y)\\
&\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) = 5y^4\operatorname{sen} x + g'(y) = (4+5y\operatorname{sen} x)y^3 && \rightsquigarrow \quad g(y) = y^4 + c
\end{aligned}$$

Por tanto la solución final será $y^5\operatorname{sen} x + y^4 = c$.

Ejercicio 3. Es de tipo Bernoulli. Poniendo $z = y^{-2}$ tenemos $z' = \dfrac{-2y'}{y^3} = -10z - 5x$, que es lineal. El factor integrante es $\mu = e^{10x}$, y así

$$z = e^{-10x}\left(-5\int xe^{10x} + c\right) = e^{-10x}\left(\frac{1}{20}e^{10x} - \frac{1}{2}xe^{10x} + c\right) = ce^{-10x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}.$$

Finalmente la solución es $y(x) = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{ce^{-10x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}}}$.

Ejercicio 4. Es equidimensional. Para resolver la ecuación homogénea miramos a la ecuación indicial

$$k(k-1)(k-2)+k-1=0 \quad \rightsquigarrow \quad k=1 \text{ triple}.$$

Así la solución general de ésta es $y_h(x)=x(c_1+c_2\log x+c_3\log^2 x)$. Una solución particular de la ecuación completa tendrá la forma $y_p(x)=Ax^4$. Se obtiene fácilmente $A=\dfrac{1}{9}$. La solución final será $y(x)=x(c_1+c_2\log x+c_3\log^2 x+\dfrac{1}{9}x^3)$.

Alternativamente, con el cambio $y(x)=z(s)$, $x=e^s$, y observando

$$xy'(x)=z'(s), \quad x^2y''(x)=z''(s)-z'(s), \quad x^3y'''(x)=z'''(s)-3z''(s)+2z'(s),$$

se obtiene la ecuación $z'''-3z''+3z'-z=3e^{4s}$. Su solución, siguiendo el método del problema siguiente, es $z(s)=e^s(c_1+c_2s+c_3s^2)+\dfrac{1}{9}e^{4s}$. Deshaciendo el cambio se obtiene la misma solución.

Ejercicio 5. Para resolver la ecuación homogénea miramos a la ecuación característica $\lambda^2+4\lambda=0$, que tiene soluciones $\lambda=0$, $\lambda=-4$. Así la solución general de ésta es $y_h(x)=c_1+c_2e^{-4x}$. Una solución particular de la ecuación completa tendrá la forma $y_p(x)=Ae^{3x}$. Se obtiene fácilmente $A=\dfrac{2}{21}$. La solución general de la ecuación será $y_g(x)=c_1+c_2e^{-4x}+\dfrac{2}{21}e^{3x}$. Imponiendo los datos iniciales tenemos

$$\begin{cases} -1=y(0)=c_1+c_2+\dfrac{2}{21} \\ 0=y'(0)=-4c_2+\dfrac{2}{7} \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad c_1=-\frac{7}{6}, \quad c_2=\frac{1}{14}.$$

Finalmente la solución es $y(x)=-\dfrac{7}{6}+\dfrac{1}{14}e^{-4x}+\dfrac{2}{21}e^{3x}$.
