UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Escuela Politécnica Superior
Departamento de Matemáticas

Cálculo III **Curso 2016-2017**

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales.

HOJA 2. **RESOLUCIÓN**

Ejercicio 1. Si $F = \mathcal{L}(f)$, se tiene $F(s) = \dfrac{4}{s^2} + \dfrac{F(s)}{1+s^2}$, que implica $F(s) = 4\left(\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s^4}\right)$. Finalmente

$$f(t) = 4t + \frac{2t^3}{3}.$$

Por otro lado, como la ecuación se puede escribir también $f(t) = 4t + \displaystyle\int_0^t f(r)\,\mathrm{sen}(t-r)\,dr$ (la convolución es conmutativa), derivando se obtiene $f'(t) = 4 + \displaystyle\int_0^t f(r)\cos(t-r)\,dr$, y una segunda vez, $f''(t) = f(t) - \displaystyle\int_0^t f(r)\,\mathrm{sen}(t-r)\,dr = 4t$ (usando la ecuación). Sustituyendo $t=0$ en las expresiones anteriores se obtiene $f(0) = 0$, $f'(0) = 4$. Por tanto la ecuación integral es equivalente al problema

$$\begin{cases} f'' = 4t \\ f(0) = 0,\ f'(0) = 4. \end{cases}$$

La solución general es $f(t) = \dfrac{2}{3}t^3 + c_1 t + c_2$. Los datos implican $c_1 = 4$, $c_2 = 0$, que dan la misma solución por otro método.

Ejercicio 2. Buscando soluciones en variables separadas, $u(x,y) = X(x)Y(y)$, se tiene $X''Y + XY'' = 0$, es decir $\dfrac{X''}{X} = -\dfrac{Y''}{Y} = \lambda$. Tenemos los problemas

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \quad 0 < x < \pi \\ X(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, \quad 0 < y < \pi \\ Y(0) = Y(\pi) = 0 \end{cases}$$

El problema de autovalores es el segundo. Se tiene la sucesión $\lambda_n = n^2$, $n \geq 1$, $Y_n(y) = \mathrm{sen}\, ny$. Sustituyendo en el primer problema se tiene $X_n(x) = c_n e^{nx} + d_n e^{-nx}$. La condición en $x = 0$ implica $d_n = -c_n$. Por tanto intentamos una solución en forma de serie

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{nx} - e^{-nx})\,\mathrm{sen}\, ny.$$

El dato en $x = \pi$ implica $c_n = 0$ para $n \neq 4$, $c_4(e^{4\pi} - e^{-4\pi}) = 3$. Finalmente la solución es

$$u(x,y) = \frac{3}{\mathrm{senh}\, 4\pi}\,\mathrm{senh}\, 4x\,\mathrm{sen}\, 4y.$$

Ejercicio 3. Buscando soluciones en variables separadas, $u(x,t) = X(x)T(t)$, se tiene $T''X = 4X''T - 4T'X$, es decir $\dfrac{T''}{4T} + \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$. Tenemos los problemas

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T'' + 4T' + 4\lambda T = 0, \quad t > 0 \\ T'(0) = 0 \end{cases}$$

El problema de autovalores es el primero. Se tiene la sucesión $\lambda_n = n^2$, $n \geq 1$, $X_n(x) = \operatorname{sen} nx$. Sustituyendo en el segundo problema se tiene, como la ecuación característica tiene soluciones $-2 \pm 2\sqrt{1-n^2}$, las soluciones de la parte temporal son

$$T_1(t) = e^{-2t}(c_1 t + d_1), \qquad T_n(t) = e^{-2t}(c_n \cos(2\sqrt{n^2-1}\,t) + d_n \operatorname{sen}(2\sqrt{n^2-1}\,t)),\ n \geq 2.$$

El dato en $t = 0$ implica $c_1 = 2d_1$, $c_n = \sqrt{n^2-1}\,d_n$, $n \geq 2$. Por tanto intentamos una solución en forma de serie

$$u(x,y) = d_1 e^{-2t}(2t+1) + \sum_{n=2}^{\infty} d_n e^{-2t}(\sqrt{n^2-1}\cos(2\sqrt{n^2-1}\,t) + \operatorname{sen}(2\sqrt{n^2-1}\,t)) \operatorname{sen} nx.$$

El dato en $x = \pi$ implica $d_n = 0$ para $n \neq 2$, $d_2\sqrt{3} = 1$. La solución es entonces

$$u(x,t) = e^{-2t}(\cos(2\sqrt{3}\,t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(2\sqrt{3}\,t)) \operatorname{sen} 2x.$$

Ejercicio 4.

$$S_c f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\pi x/L$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L \operatorname{sen} x\, dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \operatorname{sen} x \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Calculemos las integrales. $a_0 = \dfrac{1-\cos L}{L}$. Para la segunda usamos la identidad

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b))$$

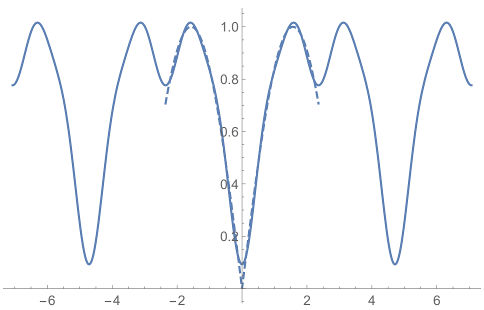
Así

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\left(-\frac{1}{1+n\pi/L}\cos(1+n\pi)x - \frac{1}{1-n\pi/L}\cos(1-n\pi/L)x\right)\Big|_0^L \\ &= \frac{1}{L+n\pi}(1-\cos(L+n\pi)) + \frac{1}{L-n\pi}(1-\cos(L-n\pi)) \\ &= \left(\frac{1}{L+n\pi} + \frac{1}{L-n\pi}\right)(1-(-1)^n\cos L) = \frac{2L}{L^2-n^2\pi^2}(1-(-1)^n\cos L). \end{aligned}$$

Finalmente

$$\operatorname{sen} x \sim S_c f(x) = \frac{1-\cos L}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{L^2-n^2\pi^2}(1-(-1)^n\cos L)\cos n\pi x/L$$

y la igualdad se da en $[0, L]$. Fuera de ese intervalo la serie converge a la extensión periódica par de la función. Por ejemplo, para $L = 3\pi/4$, comparamos la extensión par en $[-3\pi/4, 3\pi/4]$ (trazo discontinuo) con la suma de cinco términos de la serie:



Ejercicio 5. Buscando soluciones en variables separadas, $u(r,\theta) = R(r)H(\theta)$, se tiene $R''H + \frac{1}{r}R'H + \frac{1}{r^2}RH'' = 0$, es decir $\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{H''}{H} = \lambda$. Tenemos los problemas

$$\left\{\begin{array}{ll} H'' + \lambda H = 0, & 0 < \theta < \pi/2 \\ H(0) = H(\pi/2) = 0 & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, & 1 < r < 3 \\ R(3) = 0 & \end{array}\right.$$

El problema de autovalores es el primero. Se tiene la sucesión $\lambda_n = 4n^2$, $n \geq 1$, $H_n(\theta) = \operatorname{sen} 2n\theta$. Sustituyendo en el segundo problema se tiene una ecuación equidimensional con soluciones $R_n(r) = c_n r^{2n} + d_n r^{-2n}$. La condición en $r = 3$ implica $d_n = -c_n 3^{4n}$. Por tanto intentamos una solución en forma de serie

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (r^{2n} - 3^{4n} r^{-2n}) \operatorname{sen} 2n\theta.$$

El dato en $r = 1$ implica

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (1 - 3^{4n}) \operatorname{sen} 2n\theta,$$

con lo que

$$c_n(1 - 3^{4n}) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(s) \operatorname{sen} 2ns \, ds.$$

Finalmente la solución es

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n} - 3^{4n} r^{-2n}}{1 - 3^{4n}} \int_0^{\pi/2} f(s) \operatorname{sen} 2ns \, ds \ \operatorname{sen} 2n\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} f(s) \left(\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n} - 3^{4n} r^{-2n}}{1 - 3^{4n}} \operatorname{sen} 2ns \operatorname{sen} 2n\theta \right) ds \end{aligned}$$