Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Tercer Curso de Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales.

CÁLCULO III   CONTROL 1, 25 de octubre de 2016.

Cada problema resuelto se valorará sobre **2 puntos**
Tiempo: **90 minutos**

Problema 1
Una bola de nieve se derrite de tal manera que la razón de cambio de su volumen es proporcional a la raíz cuadrada del área de su superficie. El diámetro de la bola de nieve es inicialmente de 4cm y al cabo de 30 minutos su diámetro pasa a ser de 1cm. ¿Cuándo desaparecerá la bola de nieve?

Si $V(t)$ y $A(t)$ son respectivamente el volumen y el área, dependiendo del tiempo, la condición dada es $V' = -k\sqrt{A}$. Como $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ y $A = 4\pi R^2$, la condición se traduce en $4\pi R^2 R' = -2k\sqrt{\pi}R$, cuya solución, después de separar variables, es $R(t) = \sqrt{c - \frac{k}{\sqrt{\pi}}t}$. Los datos $R(0) = 2$ y $R(30) = 1/2$ dan $c = 4$, $k = \frac{\sqrt{\pi}}{8}$, es decir $R(t) = \sqrt{4 - t/8}$. Finalmente $R(t_0) = 0$ para $t_0 = 32$ minutos.
En términos del diámetro la ecuación sería $\frac{\pi}{2}D^2 D' = -k\sqrt{\pi}D$, con solución $D(t) = \sqrt{1 - t/32}$.

Problema 2
La población de una especie de bacteria (en millones de unidades) obedece a la ecuación diferencial

$$P'(t) = 3P(t) - P^2(t) - 2.$$

Describir qué pasa cuando $t \to \infty$ si la población inicial es $P(0) = 5$.

Sin resolver la ecuación vemos que las soluciones estacionarias son las raíces de $P^2 - 3P + 2 = 0$, es decir $P_1(t) = 1$ y $P_2(t) = 2$, y que $P' > 0$ si $1 < P < 2$, $P' < 0$ si $P < 1$ o $P > 2$. Por tanto, como $P(0) = 5 > 2$ se tiene que $P(t)$ es decreciente con límite 2.
Separando variables e integrando

$$\frac{P'}{P^2 - 3P + 2} = -1 \ \rightsquigarrow \ \log\left|\frac{P-2}{P-1}\right| = c - t \ \rightsquigarrow \ \frac{P-2}{P-1} = ke^{-t} \ \rightsquigarrow \ P(t) = \frac{2 - ke^{-t}}{1 - ke^{-t}}.$$

La condición inicial implica $k = 3/4$, con lo que la solución es $P(t) = \frac{8 - 3e^{-t}}{4 - 3e^{-t}}$. Finalmente $\lim_{t\to\infty} P(t) = 2$. Observemos que el límite no ha dependido de la condición inicial (esto es cierto siempre que $P(0) > 1$)).

Problema 3
Resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 2y' = 2e^x + e^{-x}, \\ y(0) = 4\,,\ y'(0) = -1\,,\ y''(0) = -16. \end{cases}$$

La ecuación característica $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$ tiene soluciones $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, por lo que las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea son $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{2x}$. A la vista del término de fuerza, vemos que hay resonancia con la primera solución de la ecuación homogénea. Así pues buscamos una solución particular de la ecuación completa en la forma $y_p = Axe^x + Be^{-x}$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene $A = -2$, $B = -1/6$. Por tanto la solución general de la ecuación dada es $y_g(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} - 2xe^x - \frac{1}{6}e^{-x}$. Los datos iniciales implican $c_1 = -3$, $c_2 = 27/2$, $c_3 = -19/3$ y así la solución buscada es

$$y(x) = -3 + \frac{27}{2}e^x - \frac{19}{3}e^{2x} - 2xe^x - \frac{1}{6}e^{-x}.$$

Problema 4
Resolver la ecuación

$$xy'' + 3y' + \frac{1}{x}\,y = x^2.$$

Es una ecuación equidimensional, multiplicando por x, $x^2y''+3xy'+y = x^3$. Buscando soluciones de la ecuación homogénea en la forma $y_h(x) = x^k$ tenemos la ecuación $k(k-1)+3k+1 = 0$, con solución $k = -1$ doble. Las soluciones entonces son $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = \frac{\log x}{x}$. Buscamos una solución particular de la ecuación completa en la forma $y_p = Ax^3$, obteniendo $A = \frac{1}{16}$. Finalmente la solución es

$$y(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2 \log x}{x} + \frac{1}{16}x^3.$$

También se puede resolver mediante el cambio de variable $y(x) = u(s)$, $s = \log x$, que convierte la ecuación en $u''+2u'+u = e^{3s}$, con solución general $u(s) = c_1e^{-s}+c_2se^{-s}+\frac{1}{16}e^{3s}$. Al deshacer el cambio se obtiene la misma solución.

Problema 5
Resolver la ecuación

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \log x.$$

La ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ tiene raíz $\lambda = -1$ doble, por lo que dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea son $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $y_2(x) = x\mathrm{e}^{-x}$. El wronskiano de estas dos soluciones es $W = \mathrm{e}^{-2x}$. Para encontrar una solución particular de la ecuación completa usamos el método de variación de las constantes, $y_p(x) = u(x)y_1(x)+v(x)y_2(x)$, donde

$$\begin{aligned} u(x) &= -\int \frac{x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-x}\log x}{\mathrm{e}^{-2x}}\,dx = \frac{x^2}{4}(1-2\log x),\\ v(x) &= \int \frac{\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-x}\log x}{\mathrm{e}^{-2x}}\,dx = x(\log x - 1), \end{aligned}$$

es decir

$$y_p(x) = \frac{x^2}{4}(1-2\log x)\mathrm{e}^{-x} + x(\log x - 1)x\mathrm{e}^{-x} = \frac{x^2}{4}(2\log x - 3)\mathrm{e}^{-x}.$$

Finalmente la solución general de la ecuación es

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{4}(2\log x - 3)\big).$$
