Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III
EXAMEN FINAL. RESOLUCIÓN
22 de enero de 2016
Tercer Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales.

Tiempo: 3 horas

Problema 1. (**2 puntos**)

a) Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy - x^2}$$

b) Resolver la siguiente ecuación diferencial encontrando un factor integrante que dependa de una sola variable

$$(xy - 1)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$$

---

a) Se trata de una ecuación homogénea. Mediante el cambio $z = y/x$ obtenemos la ecuación de variables separables

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{1+z^2}{z-1} - z\right) = \frac{1+z}{x(z-1)}.$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{1+z}\,dz = \frac{1}{x}\,dx \quad &\Rightarrow\ z - 2\log(1+z) = \log x + c \\ &\Rightarrow\ \frac{y}{x} - 2\log(x+y) + \log x = c \ \Rightarrow\ (x+y)^2 = kxe^{y/x}. \end{aligned}$$

b) Buscando un factor integrante $\mu = \mu(x)$, tenemos que para que la nueva ecuación sea exacta debe verificarse

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}((xy-1)\mu) = \frac{\partial}{\partial x}((x^2 - xy)\mu) \ \Rightarrow\ x\mu = (2x - y)\mu + (x^2 - xy)\mu' \\ &\Rightarrow\ \frac{\mu'}{\mu} = \frac{y-x}{x(x-y)} = -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Por tanto basta tomar $\mu = 1/x$. Buscamos ahora un potencial F para la ecuación

$$(y - 1/x)\,dx + (x - y)\,dy = 0.$$

Se debe tener

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - \frac{1}{x} \ \Rightarrow \ F = xy - \log x + g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + g' = x - y \ \Rightarrow \ g = -\frac{y^2}{2} + c \ \Rightarrow \ F = xy - \log x - \frac{y^2}{2} + c.$$

Por tanto la solución de la ecuación es $xy - \log x - \dfrac{y^2}{2} = k$.

Problema 2. (**2 puntos**)

a) Resolver el siguiente problema mediante transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 3e^{-x} - 2, \\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

b) Resolver el siguiente problema directamente sin hacer uso de la transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y''' - y'' - 2y' = -3e^{-x}, \\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0\,,\ y''(0) = 1. \end{cases}$$

---

a) Si escribimos $Y = Y(s)$ por la transformada de Laplace de $y = y(x)$, la ecuación transformada es

$$s^2 Y - sY - 2Y = \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s} = \frac{s-2}{s(s+1)}.$$

Por tanto

$$Y(s) = \frac{s-2}{s(s+1)(s^2-s-2)} = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}.$$

Se calcula $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$. La transformada inversa nos da la solución

$$y(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}.$$

b) La ecuación característica es $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0$, con soluciones $\lambda = 0,\ -1,\ 2$. La solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}.$$

Como el término de fuente coincide con una de las soluciones de la ecuación homogénea, buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea en la forma $y_p(x) = Axe^{-x}$. Sustituyendo obtenemos $A = -1$. La solución general de la ecuación completa es $y_h + y_p$. Los datos iniciales implican $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 0$. La solución final será

$$y(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}.$$

Problema 3. (**2 puntos**) Dado el problema para la ecuación del calor no homogénea

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 16 \operatorname{sen} 2x & 0 < x < 2\pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 5 \operatorname{sen} 2x & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

encontrar una solución en la forma $u(x,t) = A(t) \operatorname{sen} mx$.

Primero observamos que para que se verifiquen los datos frontera debe ser $2m \in \mathbb{Z}$. Sustituímos ahora en la ecuación,

$$A' \operatorname{sen} mx + 4m^2 A \operatorname{sen} mx = 16 \operatorname{sen} 2x,$$

y vemos que debe ser $m = 2$ (que además verifica la condición anterior). La ecuación que debe verificar el coeficiente A, junto con el dato inicial, es

$$\begin{cases} A' + 16A = 16 \\ A(0) = 5. \end{cases}$$

La solución es fácil, $A(t) = 1 + 4e^{-16t}$, que nos da la solución de nuestro problema

$$u(x,t) = (1 + 4e^{-16t}) \operatorname{sen} 2x.$$

Problema 4. (**2 puntos**) Resolver el problema para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5u & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 2 \operatorname{sen} x + 6 \operatorname{sen} 2x & 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Buscando soluciones en variables separadas, $u(x,t) = X(x)T(t)$, se tiene $T''X = X''T - 5TX$, es decir $\dfrac{T''}{T} - 5 = \dfrac{4X''}{X}$, o mejor, $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{T''}{T} - 5\right) = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$. Tenemos los problemas

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T'' - 5 + 4\lambda T = 0, & t > 0 \\ T'(0) = 0 \end{cases}$$

El problema de autovalores es el primero. Se tiene la sucesión $\lambda_n = n^2$, $n \geq 1$, $X_n(x) = \operatorname{sen} nx$. Sustituyendo en el segundo problema, se tiene que la forma de las soluciones de la parte temporal depende del signo de $4n^2 - 5$. Vemos que es negativo para $n = 1$ y positivo para $n \geq 2$, por lo que

$$\begin{aligned} T_1(t) &= c_1 e^t + d_1 e^{-t}, \\ T_n(t) &= c_n \cos(\sqrt{4n^2 - 5}\, t) + d_n \operatorname{sen}(\sqrt{4n^2 - 5}\, t), \qquad n \geq 2. \end{aligned}$$

El dato velocidad cero en $t = 0$ implica $c_1 = d_1$, mientras que $d_n = 0$ para $n \geq 2$. Por tanto intentamos una solución en forma de serie

$$u(x,t) = c_1(e^t + e^{-t}) \operatorname{sen} x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cos(\sqrt{4n^2 - 5}\, t) \operatorname{sen} nx.$$

El dato en $t = 0$ implica $c_1 = 1$, $c_2 = 6$, $c_n = 0$ $n \geq 3$. La solución es entonces

$$u(x,t) = (e^t + e^{-t}) \operatorname{sen} x + 6 \cos(\sqrt{11}\, t) \operatorname{sen} 2x.$$

(Si se separa variables en la forma $\dfrac{T''}{T} - 5 = \dfrac{4X''}{X} = -\lambda$, o incluso $\dfrac{T''}{T} = \dfrac{4X''}{X} + 5 = -\lambda$, habría que obtener los autovalores y autofunciones del problema espacial desde el principio; se obtiene por supuesto la misma solución).

Problema 5. (**2 puntos**) Resolver el problema para la ecuación de Laplace en un cuarto de anillo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 2 < r < 4,\ 0 < \theta < \pi/2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r,0) = 0 & 2 < r < 4 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi/2) = 0 & 2 < r < 4 \\ u(2,\theta) = 0 & 0 < \theta < \pi/2 \\ u(4,\theta) = f(\theta) & 0 < \theta < \pi/2 \end{cases}$$

Buscando soluciones en variables separadas en coordenadas polares, $u(r,\theta) = R(r)H(\theta)$, se tiene $R''H + \dfrac{1}{r}R'H + \dfrac{1}{r^2}RH'' = 0$, es decir $\dfrac{r^2R'' + rR'}{R} = -\dfrac{H''}{H} = \lambda$. Tenemos los problemas

$$\begin{cases} H'' + \lambda H = 0, & 0 < \theta < \pi/2 \\ H'(0) = H'(\pi/2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, & 2 < r < 4 \\ R(4) = 0 \end{cases}$$

El problema de autovalores es el primero. Se tiene la sucesión $\lambda_n = 4n^2$, $n \geq 0$, $H_0(\theta) = 1$, $H_n(\theta) = \cos 2n\theta$ si $n \geq 1$. Sustituyendo en el segundo problema se tiene una ecuación equidimensional (Euler) con soluciones $R_0(r) = c_0 + d_0 \log r$, $R_n(r) = c_n r^{2n} + d_n r^{-2n}$ si $n \geq 1$. La condición en $r = 2$ implica $c_0 = -d_0 \log 2$, $d_n = -c_n 2^{4n}$. Por tanto intentamos una solución en forma de serie

$$u(r,\theta) = d_0 \log(r/2) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (r^{2n} - 2^{4n} r^{-2n}) \cos 2n\theta.$$

El dato en $r = 4$ implica

$$f(\theta) = d_0 \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (4^{2n} - 2^{4n} 4^{-2n}) \cos 2n\theta,$$

con lo que

$$d_0 \log 2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(s)\, ds, \qquad c_n(4^{2n} - 2^{4n}4^{-2n}) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(s) \cos 2ns\, ds, \quad n \geq 1.$$

Finalmente la solución es

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{2\log(r/2)}{\pi \log 2} \int_0^{\pi/2} f(s)\, ds + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n} - 2^{4n}r^{-2n}}{4^{2n} - 2^{4n}4^{-2n}} \int_0^{\pi/2} f(s) \cos 2ns\, ds\; \cos 2n\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} f(s) \left(\frac{2\log(r/2)}{\pi \log 2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n} - 2^{4n}r^{-2n}}{4^{2n} - 2^{4n}4^{-2n}} \cos 2ns \cos 2n\theta \right) ds \end{aligned}$$