



# Cálculo Diferencial Aplicado

TEMA 1: Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Autores:

**Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin, Rocío Vega**

*Departamento de Ciencia e Ingeniería de Materiales e Ingeniería Química,*

*Universidad Carlos III de Madrid,*

*Grado en Ingeniería Informática y*

*Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas.*

## I. CONCEPTOS BÁSICOS

1. Una **ecuación diferencial** es una relación entre una función (que es la función incógnita) y sus derivadas. **Resolver una ecuación diferencial** significa que debemos encontrar una función o familia de funciones que satisfacen la ecuación diferencial.
2. Si la incógnita de la ecuación diferencial es una función de una sola variable, la ecuación se llama **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**. Si la incógnita es una función de varias variables, entonces la ecuación se llama Ecuación en Derivadas Parciales (EDP).
3. Se llama **orden de una ecuación diferencial** al orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.
4. Si la incógnita es una función vectorial y también hay una relación vectorial entre la incógnita y sus derivadas, se dice que tenemos un **sistema de ecuaciones diferenciales**, que pueden ser **ordinarias** o en **derivadas parciales**.
5. **Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden  $N$** .

Se pueden expresar en la forma:

$$\sum_{n=0}^N a_n(x) u^{(n)}(x) = F(x). \quad (1)$$

donde las derivadas de la función incógnita  $u(x) \equiv u^{(0)}(x)$  se representan por  $u^{(n)}(x) = d^n u / dx^n$ . Además  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_N(x)$  y  $F(x)$  son funciones conocidas.

Cualquier otro tipo de EDO será **no lineal**.

Si la función dada  $F(x) \equiv 0$ , la ecuación (1) es una EDO **lineal homogénea**. Si  $F(x)$  es no nula entonces dicha ecuación es una EDO **lineal no homogénea**.

La función  $F(x)$  se conoce habitualmente con el nombre de **término fuente** de la EDO lineal.

6. Toda EDO de orden  $N$  se puede escribir como un **sistema de  $N$  EDOs de primer orden**.

Por ejemplo, la EDO (1) equivale al sistema de EDOs de primer orden siguiente:

$$u'_0 = u_1, \quad \dots, \quad u'_{n-1} = u_n, \quad \dots, \quad u'_{N-1} = \frac{F(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n(x) u_n}{a_N(x)},$$

donde  $u_0(x) = u^{(0)}(x) \equiv u(x)$ ,  $u_n(x) = u^{(n)}(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ .

7. Existen muchas ecuaciones diferenciales cuyas soluciones se pueden encontrar por **métodos analíticos**. Sin embargo, dichas ecuaciones son una clase pequeña si se compara con el conjunto de todas las posibles ecuaciones diferenciales. Además, en la mayoría de los casos, estas ecuaciones son lineales.

Por otro lado, en algunas ocasiones, la ecuación diferencial que queremos resolver se parece, o está "**cercana**", a otra cuya solución sí sabemos hallarla mediante métodos analíticos. Existen técnicas matemáticas que sacan partido de esta "cercanía" permitiendo encontrar aproximaciones a la solución de la ecuación que interesa resolver. El lector podrá encontrar ejemplos de esta línea de razonamiento en otros cursos de ingeniería, de física o de matemáticas. En otras situaciones, podemos encontrar **soluciones aproximadas** de la ecuación diferencial y **condiciones de frontera** adicionales usando **métodos numéricos** que sustituyen la ecuación diferencial original por ecuaciones en diferencias o por problemas algebraicos que se resuelven finalmente con ordenador.

Veremos varios métodos numéricos para EDOs y EDPs durante el desarrollo de este curso.

### Ejemplos.

Las ecuaciones diferenciales surgen de forma natural porque intentamos entender los fenómenos buscando relaciones entre las tasas de variación de magnitudes y entre las propias magnitudes siguiendo razonamientos que provienen de las leyes de la física.

Consideremos, por ejemplo, que hay un gran número de vacas en un valle cerrado que posee abundantes pastos. Sea  $u(t)$  **el número de vacas por hectárea**. Una sencilla suposición acerca del crecimiento de la población de vacas es que su crecimiento,  $\dot{u} = du/dt$  es proporcional a  $u$ :

$$\frac{du}{dt} = r u. \quad (2)$$

La constante de proporcionalidad  $r > 0$  se llama **tasa de nacimiento**.

La ecuación diferencial (2) es una EDO de primer orden, lineal y homogénea de la forma (1), con  $a_1 = 1$ ,  $a_0 = -r$ ,  $F = 0$ .

Un problema típico (denominado **problema de valor inicial (PVI)**) consiste en hallar  $u(t)$  conociendo la densidad de vacas  $u(0) = u_0$  en el instante de tiempo inicial  $t = 0$ .

Solución usando el método de **separación de variables**:

$$\int^u \frac{du}{u} = \int^t r dt \implies \ln u = rt + \mu \implies u(t) = c e^{rt}, \quad (3)$$

donde  $c = e^\mu$  es una constante arbitraria.

Se puede demostrar que (3) es la solución más general posible de la EDO (2): Basta escribir  $u(t) = e^{rt}v(t)$  y sustituirlo en la EDO. Se obtiene  $dv/dt = 0$  que implica que  $v = c$  (constante).

De todas estas soluciones, solamente una cumple la **condición inicial (CI)**:  $u(0) = c$ , lo que implica que  $c = u_0$ , y es el único valor de  $c$  que satisface la CI.

*Nótese que las dos relaciones, la EDO (3) y la condición inicial  $u(0) = u_0$ , determinan de manera única la densidad  $u(t)$ .*

Esto es muy típico en modelos matemáticos que provienen de las ciencias: dan lugar a ecuaciones diferenciales con una serie de condiciones de contorno cuya solución es única.

Las condiciones matemáticas que garantizan la existencia y unicidad de la solución de problemas de valor inicial se explicarán más adelante.

**Significado físico de la solución:**

La población inicial de vacas  $u_0$  se duplica en el tiempo  $t_1 = \ln 2/r$  y se convierte en  $2^n u_0$  en el instante de tiempo  $t_n = n \ln 2/r$ .

Esta explosión de la población aplicada a la población humana en la Tierra se conoce como **ley de Malthus** (1798).

Por ejemplo, asumiendo que la población crece un 2% cada año, la tasa de nacimiento es  $r = 0.02/\text{año}$  y la se duplicará en el tiempo  $t_1 = 50 \ln 2 \approx 34.65$  años y se cuadruplicará en aproximadamente 70 años.

Por supuesto un valle cerrado tiene recursos limitados y se puede corregir la ecuación (2) imaginando que la tasa de natalidad se hace cero cuando la **capacidad de carga del valle** (definida como la máxima densidad de vacas que es capaz de sostener el valle de manera estable)  $C$  se alcanza.

Por tanto, reemplazaríamos la constante  $r$  en la EDO por  $r(1 - u/C)$  obteniéndose la que se conoce con el nombre de **ecuación logística**.

$$\frac{du}{dt} = r u \left(1 - \frac{u}{C}\right), \quad (4)$$

fue propuesta por **F. Verhulst** (1838).

La ecuación (4) se puede resolver también por separación de variables aunque el proceso

algebraico es ahora un poco más engorroso.

El resultado es

$$u(t) = \frac{C}{Ce^{-rt-\mu} + 1} = \frac{Cu_0}{u_0 + (C - u_0)e^{-rt}}, \quad (5)$$

una vez que la constante de integración  $\mu$  se calcula de modo que  $u(0) = u_0$ .

Es obvio que cualquier densidad inicial de vacas no nula evolucionará a la capacidad de carga  $C$  cuando el tiempo  $t \rightarrow \infty$ .

En este problema existen dos **puntos críticos** (también llamados **soluciones de equilibrio**)  $u = 0$  y  $u = C$ , que son **soluciones constantes** de la ecuación (4).

Claramente, las condiciones iniciales cercanas a  $u = 0$  darán lugar a soluciones que se **alejan** de este valor mientras que condiciones iniciales que se encuentran en una vecindad de  $u = C$ , dan lugar a soluciones que se **aproximan** a ese valor.

Se dice que el punto crítico  $u = 0$  es **inestable**, mientras que el punto crítico  $u = C$  es **asintóticamente estable**.

## II. EDO LINEAL DE PRIMER ORDEN

Volvamos ahora a la **solución general** de la EDO lineal de primer orden (1):

$$a_1(x)u' + a_0(x)u = F(x). \quad (6)$$

Para hallar su solución general, primero se resuelve la correspondiente **ecuación homogénea** con  $F = 0$ , mediante separación de variables.

El resultado es

$$u_h(x) = e^{-g(x)}, \quad g(x) = \int^x \frac{a_0(t)}{a_1(t)} dt. \quad (7)$$

Seguidamente multiplicamos la ecuación no homogénea (6) por  $e^{g(x)}$  y dividimos por  $a_1(x)$ .

Observamos que el resultado se puede escribir como

$$[e^{g(x)}u]' = \frac{F(x)e^{g(x)}}{a_1(x)}, \quad (8)$$

que se puede integrar de forma inmediata para dar

$$u(x) = e^{-g(x)} \int^x e^{g(t)} \frac{F(t)}{a_1(t)} dt = \int^x e^{-\int_t^x a_0(s)/a_1(s) ds} \frac{F(t)}{a_1(t)} dt. \quad (9)$$

el término  $e^{g(x)}/a_1(x)$  se conoce con el nombre de **un factor integrante** de la ecuación (6) porque la reduce a la ecuación (8), que se puede resolver por **integración directa**.

Dos posibles elecciones de  $g(x)$  se diferencian solamente en una constante de integración (que podemos denotar por  $\mu$ ) que se cancela al aplicar la ecuación (9).

Por tanto, no es importante la elección que hagamos de  $g(x)$ .

Sin embargo, seleccionando una **primitiva particular** de

$$P(x) = e^{-g(x)} \int^x e^{g(t)} \frac{F(t)}{a_1(t)} dt, \quad (10)$$

la **solución más general** de la ecuación (6) se puede escribir como

$$u(x) = Ae^{-g(x)} + P(x), \quad (11)$$

donde  $A$  es una constante.

El resultado (11) nos dice que **la solución general** de la EDO lineal no homogénea (6) es **la suma de una solución particular  $P(x)$  de la EDO lineal no homogénea más la solución general de la ecuación homogénea asociada**.

Resulta destacable que esta afirmación, conocida como el **principio de superposición** es también cierta para una ODE lineal de  $N$ -ésimo orden (1):

**Si  $P(x)$  es una solución particular de (1) y  $u_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, R$ , son soluciones de la ecuación homogénea asociada con  $F = 0$ , entonces,  $P(x) + \sum_{j=1}^R A_j u_j(x)$  es también una solución de (1) para cualesquiera constantes  $A_j$ .**

### Ejemplos.

1.  $u' + xu = xe^{x^2}$  con  $u(0) = 1$ .

Obsérvese que  $e^{x^2/2}$  es un **factor integrante** (esto se puede hacer mejor por observación directa y no usando el laborioso procedimiento de la ecuación (7) salvo que no se nos ocurra nada tras intentarlo durante un rato).

Entonces  $(e^{x^2/2}u)' = xe^{3x^2/2}$  y de aquí se tiene que  $e^{x^2/2}u(x) = \frac{1}{3}e^{3x^2/2} + c$  y por tanto  $u(x) = \frac{1}{3}e^{x^2} + ce^{-x^2/2}$ .

La condición inicial da  $1 = c + 1/3$  y se obtiene finalmente que  $u(x) = \frac{1}{3}[e^{x^2} + 2e^{-x^2/2}]$ .

2. El **método de separación de los parámetros** da la misma solución.

Sea  $u_h = Ce^{-x^2/2}$  la solución de la ecuación homogénea. Ahora reemplazamos el **parámetro  $C$**  por una función  $v(x)$  (**variación de parámetros**) y sustituimos  $u(x) =$

$e^{-x^2/2}v(x)$  en la EDO no homogénea.

El resultado es  $u' + xu = v'e^{-x^2/2} = xe^{x^2}$ .

Esto da lugar a una EDO más simple  $v' = xe^{3x^2/2}$  que puede ser integrada de forma inmediata :  $v = \frac{1}{3}e^{3x^2/2} + c$ .

La solución correspondiente de la EDO no homogénea es  $u(x) = \frac{1}{3}e^{x^2} + ce^{-x^2/2}$ .

3. El resultado de que la solución de una ODE de primer orden, lineal, no homogénea es la suma de una solución particular de la EDO más la solución general de la correspondiente EDO homogénea, sugiere **otro método de solución**.

En efecto, postulemos  $u_p(x) = Ae^{x^2}$  como una **solución particular** de la EDO no homogénea  $u' + xu = xe^{x^2}$  y calculemos el **coeficiente indeterminado**  $A$ :

$u'_p + xu_p = A2xe^{x^2} + xAe^{x^2} = 3Axe^{x^2}$  que debería ser igual a  $xe^{x^2}$ .

Esto da  $3A = 1$  o  $A = 1/3$ .

Entonces la solución particular es  $u_p(x) = \frac{1}{3}e^{x^2}$  y dado que la solución de la ecuación homogénea es  $u_h(x) = ce^{-x^2/2}$ , entonces la **solución general** es la suma  $u(x) = \frac{1}{3}e^{x^2} + ce^{-x^2/2}$ , como vimos antes.

4.  $u' + xu = x^{2m+1}$  con  $u(1) = 1$  y  $m = 0, 1, \dots$

Encontramos que  $(e^{x^2/2}u)' = e^{x^2/2}x^{2m+1} = x^{2m}(e^{x^2/2})'$ , cuyo lado derecho se puede hallar de forma exacta mediante integración por partes:

$$I_m = \int e^{x^2/2}x^{2m+1}dx = x^{2m}e^{x^2/2} - 2mI_{m-1}.$$

La solución de la ecuación en diferencias de primer orden, lineal  $I_m + 2mI_{m-1} = f_m$  es:  $I_m = (-2)^m m! I_0 + \sum_{j=1}^m (-2)^{m-j} f_j m! / j!$ .

La condición inicial da  $c = \sqrt{e}[1 - \sum_{j=0}^m (-2)^{m-j} m! / j!]$ .

5. Un **método más directo** para **encontrar** una **solución particular** consiste en usar **coeficientes indeterminados**.

Proponemos un polinomio de grado  $m$ , en términos de  $x^2$ , como solución particular:  $u_p = \sum_{j=0}^m a_j x^{2j}$ , insertandolo en la EDO del ejemplo anterior encontramos una ecuación para los coeficientes  $a_j$ :

$u'_p + xu_p = \sum_{j=0}^m 2ja_j x^{2j-1} + \sum_{j=0}^m a_j x^{2j+1} = \sum_{j=0}^m [(2j+2)a_{j+1} + a_j]x^{2j+1} = x^{2m+1}$  con  $a_{m+1} = 0$ .

Esto nos da una solución particular  $u_p = \sum_{j=0}^m (-2)^{m-j} m! x^{2j} / j!$  y añadiendo la

solución general de la EDO homogénea se obtiene la misma solución general que antes:

$$u(x) = ce^{-x^2/2} + \sum_{j=0}^m (-2)^{m-j} m! x^{2j} / j!.$$

### III. EDO DE PRIMER ORDEN NO LINEAL

No se pueden resolver de forma exacta la mayoría de las ecuaciones no lineales. Sin embargo, existen clases de ecuaciones no lineales que sí se pueden resolver de forma exacta y es importante conocerlas. El procedimiento más habitual consiste en hacer una **sustitución** que convierta estas ecuaciones en lineales o en resolubles de forma exacta.

#### A. Ecuaciones de Bernoulli

$$u' = a(x)u + b(x)u^P. \quad (12)$$

Para  $P = 0, 1$ , estas ecuaciones son **lineales** y ya hemos visto cómo resolverlas.

Para cualquier otro valor de  $P$ , estas ecuaciones son **no lineales** y se pueden convertir en lineales dividiéndolas por  $u^P$ , observando que la ecuación resultante es una ecuación lineal para la nueva incógnita  $y = u^{1-P}$ :

Dado que  $y' = (1 - P)u^{-P}u'$ , se obtiene

$$y' = (1 - P)a(x)y + (1 - P)b(x). \quad (13)$$

Esta ecuación es lineal y no homogénea.

#### Ejemplo.

La EDO  $u' = x/(x^2u^2 + u^5)$  no es una ecuación de Bernoulli en  $u(x)$ . Sin embargo, podemos reescribirla como  $dx/du = u^2x + u^5/x$ , que sí es de tipo Bernoulli con  $P = -1$  para  $x(u)$ .

La solución es  $x(u) = \pm \sqrt{ce^{2u^3/3} - u^3 - \frac{3}{2}}$ .

#### B. Ecuaciones de Riccati

$$u' = a(x)u^2 + b(x)u + c(x). \quad (14)$$



Para  $a = 0$  esta EDO es lineal y para  $c = 0$  es una ecuación de Bernoulli.

En el resto de casos la solución se puede hallar analíticamente si somos capaces de encontrar una solución particular de la ecuación de Riccati, no importa lo simple que ésta sea.

Sea pues  $u = u_1(x)$  una solución particular de (14), la transformación  $u = u_1(x) + y(x)$  elimina  $c(x)$ , dando como resultado una ecuación de Bernoulli para  $y(x)$ , que se puede resolver de forma exacta.

La ecuación de Bernoulli para  $y(x)$  es

$$y' = [b(x) + 2a(x)u_1(x)]y + a(x)y^2. \quad (15)$$

### Ejemplo.

$u' = u^2 - xu + 1$  tiene como solución particular  $u_1 = x$ .

La solución general se halla sustituyendo  $u = x + y(x)$  en la ecuación de Riccati, obteniéndose  $y' = xy + y^2$ .

Dividiendo por  $y^2$  da  $-(1/y)' = 1 + x/y$ , esto es,  $z' + xz = -1$ , donde  $z = 1/y$ .

Usando el factor integrante  $e^{x^2/2}$ , encontramos  $(e^{x^2/2}z)' = -e^{x^2/2}$ , y de aquí se tiene  $1/y = z = ce^{-x^2/2} - \int_0^x e^{-(x^2-t^2)/2} dt$ .

La solución de la ecuación de Riccati original es

$$u(x) = x + \frac{e^{x^2/2}}{c - \int_0^x e^{t^2/2} dt}.$$

**Nota:** En la mayoría de los casos, no se conoce una solución particular de la EDO de Riccati.

Por otro lado, la **sustitución**

$$u(x) = -\frac{w'(x)}{a(x)w(x)} \quad (16)$$

**transforma** la EDO de Riccati (14) en una EDO de segundo orden lineal homogénea:

$$w'' - \left[ \frac{a'(x)}{a(x)} + b(x) \right] w + a(x)c(x)w = 0. \quad (17)$$

Esta transformación también funciona a la inversa, por tanto: Existe una EDO de Riccati para cada EDO de segundo orden lineal homogénea.

Dado que no existe una solución en forma cerrada para todas las EDOs de segundo orden lineales, muchas EDOs de Riccati no tienen solución en forma cerrada.

### C. Ecuaciones exactas

Estas EDOs se pueden escribir en la forma

$$M(x, u) + N(x, u)u' = \frac{d}{dx}f(x, u(x)) = 0 \quad (18)$$

y la solución es  $f(x, u(x)) = c$  (constante).

Una **condición** necesaria y suficiente para verificar que una ecuación es exacta es que

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (19)$$

#### Ejemplos.

1. Las **EDOs separables** son exactas porque tienen la forma  $M(x) + N(u)u' = 0$  y además cumplen que  $\partial M/\partial u = \partial N/\partial x = 0$ .

2. La EDO  $u' = (x^2 - u)/(u^2 + x)$  es **exacta**:

$(u - x^2) + (u^2 + x)u' = 0$  da  $M = u - x^2$ ,  $N = u^2 + x$ , por lo tanto,  $\partial M/\partial u = \partial N/\partial x = 1$ .

Para resolverla, usamos, por ejemplo, que  $\partial f/\partial u = N = u^2 + x$ .

Por tanto  $f(x, u) = \frac{1}{3}u^3 + xu + g(x)$ , donde  $g(x)$  es la “**constante de integration**”.

Insertando esto en  $\partial f/\partial x = u + g'(x) = u - x^2$  (que es  $M$ ) da  $g' = -x^2$ .

Por lo tanto  $f(x, u) = xu + (u^3 - x^3)/3$  y la **solución general** es  $u^3 + 3xu - x^3 = c_1$ , con  $c_1 = 3c$ .

3. **Factor integrante.** A veces, la multiplicación por un factor convierte en exacta una EDO dada.

Por ejemplo,  $(1 + xu + u^2) + (1 + xu + x^2)u' = 0$ , **no es exacta** porque  $\partial M/\partial u \neq \partial N/\partial x$ .

Sin embargo, se **puede convertir en exacta** multiplicándola por  $I = e^{xu}$ .

Gracias a este factor integrante  $I$ , la EDO se puede escribir como  $[(x + u)e^{xu}]' = 0$ , cuya solución es  $(x + u)e^{xu} = c$

### D. Cambios de variable. Sustituciones

A veces una **sustitución** convierte una EDO no lineal en otra que se puede resolver directamente. Las sustituciones lineales son las más fáciles de detectar.

Veamos algunos **ejemplos**:

1.  $y = x + u$  convierte la ecuación  $u' = \cos(x + u)$  en la **EDO separable**:  $y' = 1 + \cos y$ .
2. La **transformación lineal**  $x = av + bw + c$ ,  $u = dv + ew + f$ , con una adecuada elección de los **coeficientes**  $a, b, c, d, e, f$ , convierte  $u' = (Ax + Bu + C)/(Dx + Eu + F)$  en una **EDO separable** para la variable  $w(v)$ .
3. Para una EDO de la forma  $u' = F(u/x)$ , la sustitución  $y = u/x$  da lugar a una **EDO separable** para la variable  $y(x)$ :  $y' = [F(y) - y]/x$ .
4. La ecuación  $u' = u/x + 1/(u + x)$  se convierte en una **EDO de Bernoulli** tras efectuar el cambio  $y = x + u$ :  $y' = y/x + 1/y$ .

Tomando  $z = y^2$ , obtenemos la EDO lineal  $z' = 2z/x + 2$ .

Una **solución particular** de la forma  $z = kx$  da  $k = 2k + 2$  o  $k = -2$ .

La **solución general** entonces es  $-2x$  más la solución general de la EDO homogénea, que es:  $cx^2$ :  $z = cx^2 - 2x$ . (De forma equivalente, dividiendo por  $x^2$  se obtiene  $(z/x^2)' = 2/x^2$ ). La solución de la EDO original es  $u(x) = -x \pm (cx^2 - 2x)^{1/2}$ .

#### IV. CAMPOS DE DIRECCIONES, EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DEL PROBLEMA DE VALOR INICIAL (PVI)

Consideremos la EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (20)$$

Queremos **visualizar las soluciones** como **trayectorias** en el plano  $(x, y)$ . Para ello, queremos cubrir el plano con un mallado y **dibujar líneas tangentes con pendiente**  $f(x, y)$  en cada punto del mallado  $(x, y)$ .

Esta visualización utiliza el **ordenador** como una herramienta que es capaz de producir el **campo de direcciones** (también llamado **campo de pendientes** o **campo de tangentes**) de la Figura 1, correspondiente a la EDO  $y' = 9.8 - 0.2y$ .

Nótese que el **mallado** está formado por los **puntos**  $x_j = 0.5j$ ,  $j = 0, 1, \dots, 20$  e  $y_k = k$ ,  $k = 39, \dots, 60$ , que cubre el rectángulo con esquinas en los puntos  $(0, 39)$ ,  $(10, 39)$ ,  $(0, 60)$ ,  $(10, 60)$ .

La **solución de equilibrio** coincide con la **isoclina** que tiene pendiente igual a cero,  $9.8 - 0.2y = 0$ , es decir, con la línea de ecuación  $y = 49$ .

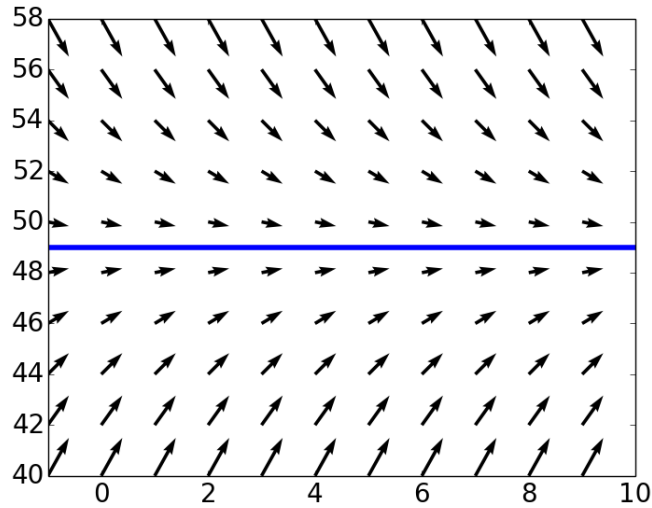


FIG. 1: Campo de direcciones en el plano  $(x, y)$  correspondiente a la EDO  $y' = 9.8 - 0.2y$ , mostrando la solución de equilibrio  $y^* = 9.8/0.2 = 49$ .

Las trayectorias  $y = y(x)$  son curvas cuyas tangentes en el punto  $(x, y)$  tienen pendiente  $f(x, y)$ . Visualizando el campo de tangentes, podemos **dibujar cualitativamente** las trayectorias.

En este ejemplo, las trayectorias son curvas que se aproximan a la solución de equilibrio cuando  $x \rightarrow \infty$ . Esto, por supuesto, concuerda con el hecho de que la solución de la EDO parametrizada mediante la constante de integración arbitraria  $c$  es

$$y(x) = 49 + c e^{-x/5}.$$

De forma equivalente, la solución del *problema de valor inicial* (PVI)  $y = y_0$  para  $x = x_0$  es

$$y(x) = 49 + (y_0 - 49) e^{-(x-x_0)/5}.$$

A partir del campo de pendientes, inferimos que la solución que comienza en un punto dado  $(x_0, y_0)$  no podrá ser cruzada por ninguna otra trayectoria. De hecho, en el punto donde dos trayectorias diferentes se cruzan se tendrían dos valores diferentes de  $f(x, y)$  y esto no puede ocurrir en las funciones univaluadas. Esta condición se hace más precisa mediante lo

que sigue:

**Teorema de existencia y unicidad :**

Si  $f$  y  $\partial f/\partial y$  son funciones continuas en un rectángulo  $R$  y el punto  $(x_0, y_0) \in R$ , entonces,  $y' = f(x, y)$  tiene una única solución si  $|x - x_0| < \delta$  (para algún  $\delta > 0$  que deja  $x$  en el rectángulo  $R$ ) que satisface la condición inicial  $y(x_0) = y_0$ .

La **demostración** se puede encontrar en muchos libros. Véase, por ejemplo, la página 112 de Boyce and Di Prima [1]. Típicamente, el PVI se transforma en una ecuación integral que se resuelve por iteración, justificando los pasos. Se puede probar que las soluciones dependen de forma continua de los datos iniciales  $(x_0, y_0)$ , pero esto está fuera del alcance del presente curso. Véase también el capítulo 2 de la referencia [4].

**¿Qué sucede si las hipótesis del teorema no se satisfacen?.**

Consideremos el PVI

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

Claramente las hipótesis del teorema no se cumplen en el punto  $(0, 0)$  porque la derivada de  $\sqrt{y}$  no es continua en  $(0, 0)$ .

El método de separación de variables da la solución del PVI  $y(x) = x^2$ , pero además,  $y(x) = 0$  e  $y(x) = (x - \xi)^2\theta(x - \xi)$ , para cualquier  $\xi > 0$  son también soluciones. [ $\theta(x) = 1$  para  $x > 0$  y  $\theta(x) = 0$  para  $x < 0$  es la **función de Heaviside** o función escalón unitario].

Resulta por tanto que si  $f(x, y)$  es continua en  $(x_0, y_0)$  y en un rectángulo que lo contiene, esto nos garantiza la existencia de una solución del PVI pero, como hemos visto en el ejemplo anterior, se necesita la continuidad de  $\partial f/\partial y$  para tener una única solución del PVI.

Se puede encontrar una condición general y ligeramente más precisa en la versión del teorema de existencia y unicidad que se muestra en la referencia [4].

Ahora calcularemos el **campo de pendientes de un ejemplo más difícil**:

$$\frac{dy}{dx} = xy(y - 2). \tag{21}$$

La **construcción por ordenador** del campo de pendientes se realiza seleccionando un rectángulo lo suficientemente grande, configurando un mallado y pintando las pendientes en los puntos del mallado.

La **construcción hecha por un humano** ha de ser algo más inteligente. Queremos separar el plano en sectores en los que conocemos el signo de  $y'$  y de  $y''$ . En particular, queremos encontrar sectores en los que:

- a.  $y' < 0, y'' < 0$ : las trayectorias son **decrecientes y cóncavas**;
- b.  $y' < 0, y'' > 0$ : las trayectorias son **decrecientes y convexas**;
- c.  $y' > 0, y'' < 0$ : las trayectorias son **crecientes y cóncavas**;
- d.  $y' > 0, y'' > 0$ : las trayectorias son **crecientes y convexas**;

Los sectores en los que  $y'$  tiene el mismo signo se separan mediante **isoclinas** de pendiente cero (**rectas tangentes horizontales**) o de pendiente infinita (**rectas tangentes verticales**).

Los sectores en los que  $y''$  tiene el mismo signo se separan mediante **líneas de inflexión**, esto es, puntos en los que  $y'' = 0$ .

Usamos la regla de la cadena para calcular  $y''$ :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}f(x, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f.$$

Se sigue el siguiente **protocolo**:

- i) Dibujar las isoclinas con pendiente cero (también llamadas **nulliclinas**):  $f(x, y) = 0$ ;
- ii) Dibujar las isoclinas con pendiente infinita:  $1/f(x, y) = 0$ ;
- iii) Dibujar las curvas con puntos de inflexión:  $y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = 0$ ;
- iv) Separar el plano en sectores, siguiendo los apartados  $a, b, c, d$  que hemos descrito más arriba.

Para el ejemplo (21), encontramos:

- i) Nulliclinas:  $x = 0, y = 0$ , and  $y = 2$ . Las nullclinas  $y = 0$  e  $y = 2$  son también líneas de punto de equilibrio.
- ii) No existen líneas con pendiente vertical.

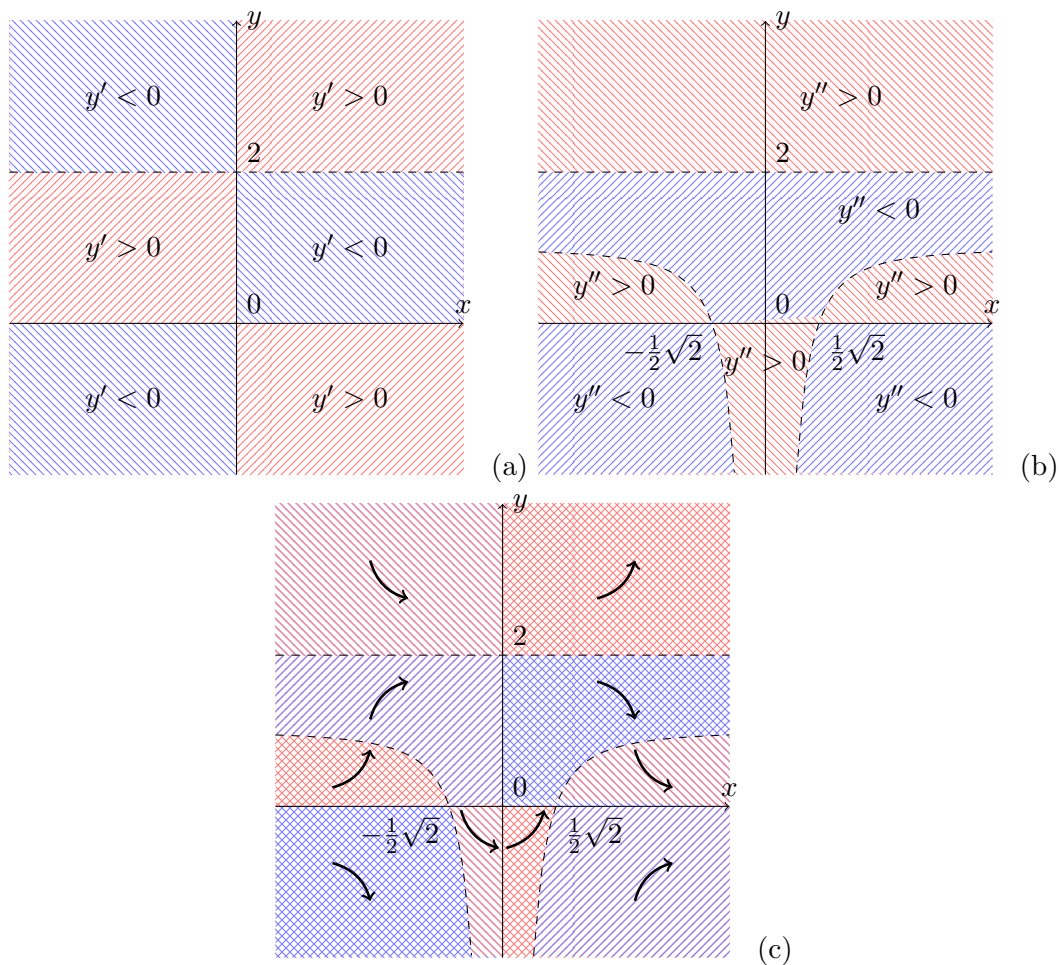


FIG. 2: Sectores de: (a)  $y(x)$  decreciente y creciente, (b)  $y(x)$  cóncava y convexa , (c) información combinada de los signos de  $y'$  e  $y''$ . La EDO es  $y' = xy(y - 2)$ .

iii)  $y'' = y(y - 2)(1 + 2x^2y - 2x^2) = 0$ . Por tanto, las líneas de puntos de inflexión son  $y = 0$ ,  $y = 2$  e  $y = 1 - \frac{1}{2x^2}$ .

iv) La separación del plano en sectores es como se indica en la Figura 2.

La Figura 3 muestra el campo de pendientes y algunas trayectorias representativas.

Por separación de variables, encontramos la solución general:

$$\int x dx = \int \frac{dy}{y(y-2)} = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} \right] dy = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-2}{y} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \frac{2}{y} \right|.$$

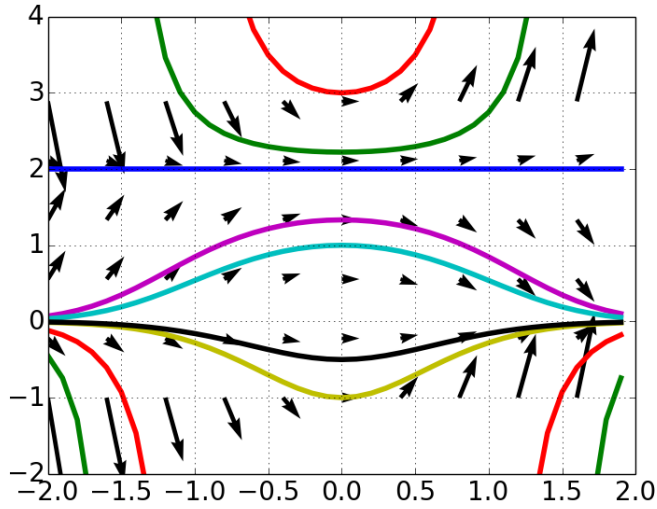


FIG. 3: Campo de pendientes y algunas trayectorias en el plano  $(x, y)$  para la EDO,  $y' = xy(y - 2)$  con solución dada por (22) para (rojo)  $c = \frac{1}{3}$ , (verde)  $c = 0.1$ , (magenta)  $c = -\frac{1}{2}$ , (cian)  $c = -1$ , (azul)  $c = 0$ , (amarillo)  $c = 3$ .

Esto da  $|1 - 2/y| = ce^{x^2}$ , es decir,  $1 - 2/y = \pm ce^{x^2}$  ( $c > 0$ ) o bien

$$y = \frac{2}{1 - ce^{x^2}}, \quad c \text{ es un número real arbitrario.} \quad (22)$$

Las trayectorias de la Figura 3 se obtienen tomando las constantes siguientes en (22):

(rojo)  $c = \frac{1}{3}$ , (verde)  $c = 0.1$ , (magenta)  $c = -\frac{1}{2}$ , (cian)  $c = -1$ , (azul)  $c = 0$ , (amarillo)  $c = 3$ .

## V. MÉTODOS NUMÉRICOS: MÉTODO DE EULER

El método numérico más antiguo utilizado para resolver el PVI general dado por la ecuación (20),  $y' = f(t, y)$  con  $y(t_0) = y_0$ , usa el campo de pendientes [1].

Concretamente, en el punto  $t_0$ , la **línea recta tangente a la trayectoria que pasa por este punto es**

$$y = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0).$$



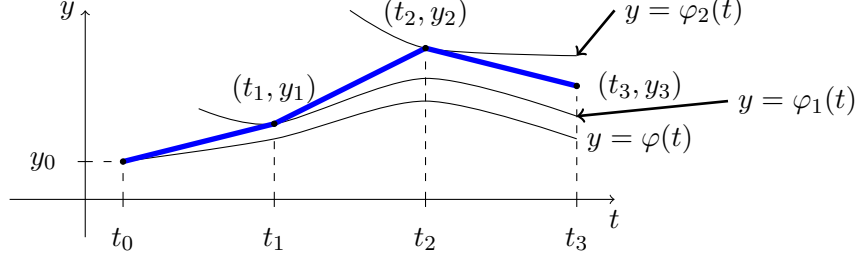


FIG. 4: El método de Euler aproxima una trayectoria dada  $y = \varphi(t)$  mediante segmentos que provienen de trayectorias cercanas  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ ,  $\dots$ , en el plano  $(t, y)$ .

Podemos aproximar la trayectoria con esta tangente para valores suficientemente pequeños  $|t - t_0|$ , hasta un punto  $t_1$  de modo que  $y(t_1) \approx y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0)$ .

Después del segmento  $[t_0, t_1]$ , podemos aproximar  $y(t) \approx y_1 + f(t_1, y_1)(t - t_1)$  hasta un punto  $t_2$  tal que  $y(t_2) \approx y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1)$ , y así sucesivamente.

El tipo de aproximación que estamos describiendo se muestra en la Fig. 4. Si dividimos el intervalo de tiempo  $[0, T]$  en  $N$  segmentos iguales de anchura  $h$ , obtenemos la forma habitual en la que se expresa el **esquema numérico de Euler** que comienza en la condición inicial  $y(t_0) = y_0$ :

$$y_{j+1} = y_j + f(t_j, y_j) h, \quad (23)$$

$$t_0 < t_1 = t_0 + h < \dots < t_j = t_0 + jh < \dots < t_N = t_0 + Nh = T.$$

El método de Euler aproxima mejor la solución cuanto más pequeños son los segmentos  $|t_{j+1} - t_j|$ .

De la Fig. 4 también concluimos que cuando las trayectorias son convergentes los errores son pequeños, mientras que los errores crecen cuando las trayectorias divergen.

Se puede obtener una **valoración más cuantitativa del método de Euler** [1], del siguiente modo.

Primero, reescribimos el PVI como una **ecuación integral** equivalente:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s), s) ds. \quad (24)$$

Esta ecuación, para  $0 \leq \tau < t \leq T$ , da lugar a:

$$y(t) = y(\tau) + \int_{\tau}^t f(y(s), s) ds. \quad (25)$$

Para resolver aproximadamente esta ecuación en un intervalo de tiempo  $[0, T]$ , dividimos dicho intervalo en  $N$  subintervalos:  $0 \leq t_1 = h, \dots, t_N = hN$  y aproximamos la integral mediante algún **esquema de cuadraturas**. Métodos de un paso asignan  $t = t_{j+1}$  y  $\tau = t_j$ . El método más simple entre los métodos de un paso es el **esquema de Euler**:

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j), \quad (26)$$

en el que la integral se aproxima por el producto de  $h$  por el integrando evaluado en el tiempo anterior  $t_j$ .

Hemos llamado  $y_j$  a la aproximación de la solución exacta  $y(t)$  en el instante de tiempo  $t = t_j = jh$ .

Nótese que el método de Euler también se puede obtener aproximando la derivada  $dy(t)/dt \approx (y_{j+1} - y_j)/h$ .

Se puede probar que los **esquemas de un paso** que son **consistentes** son también **convergentes**.

### **Ejemplo 1.**

Considerar el PVI

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = ry(t), \\ y(0) = u_0 > 0. \end{cases} \quad (27)$$

y resolverlo en el intervalo  $[0, 1]$ .

El **método de Euler** da lugar a

$$y_{j+1} = y_j + hry_j = (1 + hr)y_j, \quad y_0 = y_0, \quad h = \frac{1}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (28)$$

La solución del esquema es

$$y_j = (1 + hr)^j y_0. \quad (29)$$

Nótese que la **solución exacta** es  $y(t) = e^{rt}y_0$ , por tanto  $y(t_j + h) = e^{rh}y(t_j)$ .

La ecuación (28) muestra que el método de Euler aproxima  $e^{rh}$  mediante la línea recta  $1 + rh$ .

### **Errores.**

Supongamos que hemos aproximado el PVI mediante un **esquema numérico de un paso**,  $y_{j+1} = y_j + \Phi(t_j, y_j, y_{j+1}, h) h$ .

Tenemos que  $\Phi(t_j, y_j, y_{j+1}, h) = f(t_j, y_j)$  referido al esquema de Euler. Este último es un **esquema explícito** porque  $y_{j+1}$  viene dado como una función explícita de  $y_j$ .

Definamos el **error de truncamiento** local o **error de discretización** de un esquema numérico de un paso como:

$$\tau_{j+1} = \left| \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{h} - \Phi(t_j, y(t_j), y(t_{j+1}), h) \right|, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (30)$$

donde sustituimos la solución exacta  $y(t_j)$  en lugar de  $y_j$ .

Si los valores  $\tau_j$  desaparecen cuando  $h \rightarrow 0$ , decimos que **las ecuaciones en diferencias son consistentes con la ecuación diferencial**.

En el método de Euler (23), aplicando el teorema de Taylor y la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{h} &= \frac{y(t_j + h) - y(t_j)}{h} = \frac{dy(t_j)}{dt} + \frac{h}{2} \frac{d^2y(\xi)}{dt^2} \\ &= f(y(t_j), t_j) + \frac{h}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial t}(\xi, y(\xi)) + \frac{\partial f(\xi, y(\xi))}{\partial y} f(\xi, y(\xi)) \right], \end{aligned} \quad (31)$$

donde  $t_j \leq \xi \leq t_{j+1}$ , con tal de que existan las derivadas parciales de  $f$  y sean continuas.

En este caso, el **error de truncamiento máximo** está acotado por

$$\tau = \max_j |\tau_j| \leq \frac{h}{2} M_2, \quad M_2 = \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{d^2y(t)}{dt^2} \right|. \quad (32)$$

El resultado (32) indica que el **método de Euler** tiene un **error de truncamiento** local de **orden  $h$** .

**Definición.** Decimos que  $f(h) = O(g(h))$  cuando  $h \rightarrow 0$  si existen dos constantes positivas  $c$  y  $\epsilon$  tales que  $|f(h)| < c|g(h)|$  para todo  $|h| < \epsilon$ .

Se puede demostrar que el **error global**  $\sup_j |y(t_j) - y_j|$  es también de orden  $h$  y esto concluye que el **método de Euler** es un **método de orden  $O(h)$**  o **método de primer orden**.

### **Código.**

Implementaremos el método de Euler con *Matlab* para integrar el siguiente problema:

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

en el dominio  $0 \leq x \leq 5$ .

Usaremos varios pasos de discretización ( $h = 0.5, 0.25, 0.1$ ) y compararemos la solución aproximada con la solución exacta  $y(x) = e^{-x}$ . Un código escrito en *Matlab* para el método de Euler puede ser el que sigue:

```
clear all          % Para borrar los datos previos.
h=0.5;            % El paso de discretización.
a=0;b=5;          % Dominio.
N=round((b-a)/h) % N+1 es el número total de nodos.
x(1)=0 ; y(1)=1; % Condición inicial.
exacsol(1)=y0;    % Primer valor de la solución exacta.

for i= 1:N        % Inicio del proceso iterativo.
y(i+1)=y(i)+h*(-y(i)); % ESQUEMA DE EULER EXPLICITO
x(i+1)=x(i)+h;      % Nodo siguiente.
exacsol(i+1)=exp(-x(i+1));
end

plot(x,y,'r*',x,exacsol)
xlabel('x') ; ylabel('y') ; legend('Aprox. por Euler explicito','Solucion exacta')
```

**Analicemos ahora la relación entre el orden del método de Euler y los resultados obtenidos aplicando dicho método.**

La Tabla I compara los resultados obtenidos con el método de Euler cuando se toman los pasos  $h = 0.5, 0.25, 0.1$ .

El **error total** es el error máximo cometido por el método cuando se compara con la solución exacta.

Para el método de Euler, dichos errores decrecen con  $h$  : Si tomamos  $h_1 = 0.5$ , el error es

$\text{error}_1 = 0.1179$ . Reduciendo ahora el paso con factores 2 y 5 (esto es,  $h_2 = h_1/2 = 0.25$  y  $h_3 = h_1/5 = 0.1$ ), se reduce el error en factores 2 y 5, respectivamente ( $\text{error}_1/2 \approx \text{error}_2 = 0.0515$ ,  $\text{error}_1/5 \approx \text{error}_3 = 0.0192$ ).

$h$	$N$ (número de nodos)	Error total del método de Euler
0.5	11	0.1179
0.25	21	0.0515
0.1	51	0.0192

TABLE I: Errores totales del método de Euler para los pasos  $h = 0.5, 0.25$  y  $0.1$ .

### ***Método de Euler (backward).***

Podríamos haber aproximado la integral en (25) para  $t = t_{j+1}$  y  $\tau = t_j$  mediante  $hf(t_{j+1}, y_{j+1})$ , obteniendo así:

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_{j+1}, y_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (33)$$

Este esquema es ***implícito*** porque el lado derecho es una función que depende de  $y_{j+1}$  (salvo que  $f$  sea independiente de  $y$ ) y tenemos que resolver (33) para  $y_{j+1}$  en cada paso de tiempo. El esquema dado por (33) es conocido con el nombre de método de Euler backward y se podría haber obtenido de la EDO  $y' = f(t, y)$  si la derivada  $dy/dt$  calculada en el tiempo  $t_{j+1}$  se hubiese reemplazado por la diferencia finita atrasada  $(y_{j+1} - y_j)/h$ .

El método de Euler backward es también un método de orden  $O(h)$ .

### ***Ejemplo 2.***

Resolver el PVI de primer orden del ejemplo 1, aplicando el método de Euler backward.

Se obtiene

$$y_{j+1} = y_j + hry_{j+1}, \quad y_0, \quad h = \frac{1}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (34)$$

en lugar de (28). Resolviendo esta ecuación en la variable  $y_{j+1}$ , encontramos que

$$y_{j+1} = \frac{y_j}{1 - hr} = \frac{y_0}{(1 - hr)^j}, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (35)$$

Esta ecuación tiene sentido para valores de  $h$  suficientemente pequeños tales que  $hr < 1$ .

### ***Ejemplo 3: fallo del método de the Euler.***

Resolviendo el PVI  $y' = 2\sqrt{y}$ ,  $y(0) = 0$ , mediante el método de Euler solamente encontramos la solución  $y(x) = 0$  (comprobar). La razón de esto es que el método de Euler es explícito y si comenzamos con el valor  $y_0 = 0$ , siempre obtenemos  $y_j = 0$ .

Por otro lado, el método de Euler backward da  $y_{j+1} = y_j + 2hy_{j+1}^{1/2}$ .

Para  $y_0 = 0$ , encontramos que  $y_1 = 2hy_1^{1/2}$ , que tiene por soluciones  $y_1 = 0$  e  $y_1^{1/2} = 2h$  o  $y_1 = (2h)^2$ . Una vez alcanzado el valor  $y_1 = (2h)^2$ , las siguientes iteraciones intentan llegar a la solución de la EDO,  $y(t) = t^2$ . Por tanto, cualquier pequeño error que haga  $y_0 > 0$  dará lugar a iteraciones que intentarán alcanzar la función  $y(t) = t^2$ .

## **VI. MÉTODOS NUMÉRICIOS: MÉTODO DE HEUN**

El método de Euler es sencillo pero su orden es bajo. Para mejorarlo, necesitamos aproximar mejor la integral de la ecuación (24). Una posibilidad consiste en usar la **regla del trapecio**

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s)) ds \approx \frac{h}{2} [f(t_{j+1}, y(t_{j+1})) + f(t_j, y(t_j))]. \quad (36)$$

Obtenemos el siguiente **método implícito**

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(t_{j+1}, y_{j+1}) + f(t_j, y(t_j))], \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (37)$$

que también se le conoce a veces como un **esquema de Crank-Nicholson**.

Para lograr que el método sea explícito, podemos calcular  $y(t_{j+1})$  en (36) usando el método de Euler. El resultado final es conocido por **método de Heun**:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(t_{j+1}, y_j + hf(t_j, y_j)) + f(t_j, y_j)], \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (38)$$

El método de Heun es un ejemplo de esquema **predictor-corrector** en el cual usamos el método de Euler para hacer una predicción de  $y(t_{j+1})$  y la corregimos insertando dicha predicción en (36).

El esquema (38) se puede escribir de forma equivalente como

$$\begin{aligned} p_{j+1} &= y_j + hf(t_j, y_j), & t_{j+1} &= t_j + h, \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2} [f(t_{j+1}, p_{j+1}) + f(t_j, y_j)], & j &= 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (39)$$

Usando el teorema de Taylor, podemos probar que el método de Heun tiene un **error de truncamiento de orden**  $\tau = O(h^2)$ . El **error global** también es de **orden**  $h^2$ .

Como consecuencia, si reducimos el paso a la mitad en el método de Heun, el error global se reduce a la cuarta parte.

**Ejemplo 4.**

El método de Heun aplicado al PVI (27) del ejemplo 1 da

$$\begin{aligned} p_{j+1} &= y_j + hry_j, \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{hr}{2}(p_{j+1} + y_j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (40)$$

En este caso,  $p_{j+1} = (1 + hr)y_j$  y (40) da lugar a

$$y_{j+1} = \left(1 + hr + \frac{h^2r^2}{2}\right)y_j = \left(1 + hr + \frac{h^2r^2}{2}\right)^j y_0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (41)$$

La **solución exacta** es  $y(t_j + h) = e^{rh}y(t_j) = e^{r(t_j+h)}y_0$ , que comparada con (41) muestra que el método de Heun produce un término más en la aproximación de la exponencial  $e^{rh}$  que el método de Euler que, como vimos, obtiene  $y_{j+1} = (1 + rh)y_j = (1 + rh)^j y_0$ .

## VII. MÉTODOS NUMÉRICOS: MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Una familia diferente de métodos de integración para los PVI's habituales surgen al hacer una expansión de Taylor de una diferencia finita:

$$\begin{aligned} y(t+h) - y(t) &= h \frac{dy}{dt}(t) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2y}{dt^2}(t) + O(h^3) \\ &= hf(t, y) + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) f(t, y(t)) \right] + O(h^3), \end{aligned} \quad (42)$$

donde hemos sustituido  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) f(t, y(t))$  en lugar de  $\frac{d^2y}{dt^2}(t)$ .

Ignorando el término de error, obtenemos un **esquema numérico de orden 2**.

Sin embargo, tener que calcular las derivadas parciales es computacionalmente muy costoso. Por lo tanto, la idea de Runge-Kutta (RK) consiste en sustituir el lado derecho de (42) por una combinación lineal de dos funciones que de un esquema relacionado del mismo orden:

$$y(t+h) = y(t) + Ahf_0 + Bhf_1, \quad f_0 = f(t, y), \quad f_1 = f(t + Ph, y + Qhf_0).$$

Ahora, usamos la fórmula de Taylor para funciones de dos variables para expandir  $f_1$ :

$$y(t+h) = y(t) + (A+B)hf(t, y) + BPh^2 \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + BQh^2 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) f(t, y) + O(h^3).$$

Igualando esto a (42), se obtiene

$$A + B = 1, \quad BP = \frac{1}{2}, \quad BQ = \frac{1}{2}. \quad (43)$$

Este es un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas,  $A$ ,  $B$ ,  $P$  y  $Q$ . Por tanto, podemos dar valores a una de las incógnitas y obtener diferentes **esquemas de RK de segundo orden (RK2)**.

Los esquemas RK2 más frecuentes son:

1.  $A = \frac{1}{2}$  y por tanto  $B = \frac{1}{2}$ ,  $P = 1$ ,  $Q = 1$ . Recuperamos el **esquema de Heun**:

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{2} [f(t, y) + f(t+h, y+hf(t, y))].$$

2.  $A = 0$  da  $B = 1$ ,  $P = Q = \frac{1}{2}$  y se obtiene el RK2 de **punto-medio**, también llamado **método de Euler modificado** o **método de Cauchy**:

$$y(t+h) = y(t) + hf\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right).$$

3.  $A = \frac{1}{4}$  da  $B = \frac{3}{4}$ ,  $P = Q = \frac{2}{3}$  y encontramos

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{4}f(t, y) + \frac{3h}{4}f\left(t + \frac{2h}{3}, y + \frac{2h}{3}f(t, y)\right).$$

**Se puede probar que esta elección tiene un error de truncamiento de orden  $O(h^4)$ .**

Ideas similares se usan para generar esquemas más precisos como RK3 y RK4, que se utilizan frecuentemente en códigos numéricos.

Por ejemplo, la rutina del programa Matlab llamada **ode45** es un esquema RK4 con paso variable, dicho paso se ajusta usando un esquema RK5 que permite estimar el error que se comete tras cada paso.



- 
- [1] W.E. Boyce and R.C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems. 9th ed. John Wiley & Sons, N.Y. 2009.
- [2] G.F. Carrier and C.E. Pearson, Ordinary differential equations. SIAM Classics in Applied Mathematics **6**. SIAM, PA 1991.
- [3] G. F. Simmons, Differential equations with applications and historical notes. 2nd ed. MacGraw Hill, N.Y. 1991. La traducción al español apareció en 1993.
- [4] R. M. M. Mattheij and J. Molenaar, Ordinary differential equations in theory and practice. Classics in Applied Mathematics **43**. SIAM, PA 2002. Este libro tiene un contenido matemáticamente más precioso que el mostrado en este capítulo pero su nivel es mucho más alto y es difícil de leer.
- [5] C. M. Bender and S. A. Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. McGraw Hill, N.Y. 1978. Este también es un libro de nivel avanzado pero el capítulo 1 contiene un compendio muy útil de métodos para hallar soluciones exactas de ODEs.