



Cálculo Diferencial Aplicado

TEMA 4: Problemas con valores en la frontera.

Autores:

Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin, Rocío Vega

Departamento de Ciencia e Ingeniería de Materiales e Ingeniería Química,

Universidad Carlos III de Madrid,

Grado en Ingeniería Informática y

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas.

I. PROBLEMA CON VALORES EN LA FRONTERA (PVF)

A. Existencia de soluciones de un PVF

Hasta ahora, hemos estudiado **problemas de valor inicial** para los que el teorema de existencia y unicidad establece que pueden resolverse de forma única bajo condiciones bastante generales.

También hay problemas en los que las soluciones de una EDO de alto orden (mayor que uno) o sistemas de EDOs con al menos dos ecuaciones tienen que satisfacer condiciones en dos o más valores diferentes de la variable independiente t . Estos **problemas con valores en la frontera (PVF)** son más difíciles de estudiar porque la continuidad de las funciones que aparecen en las EDOs y de sus correspondientes derivadas no garantizan la existencia y unicidad de una solución.

Ejemplo 1.

Consideremos el PVF $u''(x) + u(x) = 0$ con $u'(0) = 0$, $u(\pi/2) = 1$.

La solución general de la EDO es $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Los coeficientes de la EDO son funciones continuas con derivadas continuas y con $W(\cos x, \sin x) = 1 \neq 0$. Sin embargo, el PVF **no tiene solución** porque $u'(0) = 0$ implica $c_2 = 0$ y $u(\pi/2) = c_1 \cos(\pi/2) = 0$ no puede satisfacer la otra condición de frontera para ningún valor de c_1 .

La mayoría de los PVFs tienen solución única.

Consideremos

$$u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0 \tag{1}$$

con **condiciones de frontera** $u'(x_0) = a$, $u(x_1) = b$.

Si $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son dos soluciones independientes de la EDO (1), su solución general es $u(x) = Au_1(x) + Bu_2(x)$, que evaluada en las condiciones de frontera da lugar al sistema

$$\begin{aligned} Au_1'(x_0) + Bu_2'(x_0) &= a, \\ Au_1(x_1) + Bu_2(x_1) &= b. \end{aligned} \tag{2}$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas de forma única para A y B con tal de que el determi-

nante siguiente satisfaga

$$\begin{vmatrix} u_1'(x_0) & u_2'(x_0) \\ u_1(x_1) & u_2(x_1) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

Esta condición es la generalización de la condición de Wronskiano no nulo de los PVI y suele ser satisfecha por los PVFs, aunque no fue así en el ejemplo 1.

En este caso, el determinante dado por (3) se anula y el PVF o bien no tiene solución como en el ejemplo 1, o bien tiene infinitas soluciones.

Ésto último se puede ver a partir del ejemplo 1 si tomamos la condición de frontera en $x = \pi/2$ con valor $u(\pi/2) = 0$: Entonces $u(x) = c_1 \cos x$ para valores arbitrarios de c_1 es solución del PVF.

Esta situación es típica en **problemas de autovalores** expresados como PVFs de EDOs, como veremos después en este curso.

Problemas con valores en la frontera (PVFs) para EDOs no lineales.

En general, los PVFs no lineales son mucho más complicados de resolver que los lineales.

Seguidamente **sólo daremos unos pocos ejemplos.**

La idea es hallar primer el **retrato de fases** del sistema no lineal, identificar las condiciones de frontera mediante curvas apropiadas y entonces decidir qué trayectorias (si existen) pueden satisfacer el PVF, teniendo en cuenta que en el "tiempo" que tarda una trayectoria en unir las curvas "frontera" debería recorrer la "longitud" L .

Podría darse el caso de que el PVF tuviera varias soluciones correspondientes a trayectorias diferentes o bien no tuviera soluciones porque no existan tales trayectorias.

Ejemplo 2.

Consideremos el PVF:

$$u''(x) = -\alpha \sin u(x), \quad u(0) = 0, u(L) = a > 0, \quad (4)$$

que se debe resolver en el intervalo $0 \leq x \leq L$.

Podemos probar que este problema tiene una solución única para $a > \pi$, mientras que puede tener infinitas soluciones para valores de L suficientemente grandes.

La idea es considerar el plano de fase asociado a (4):

$$u' = v, \quad v' = -\alpha \sin u \implies v^2 - 2\alpha \cos u = h, \quad (5)$$

que corresponde al **péndulo no lineal** representado en la Figura 1.

Observamos que $h > -2\alpha$ para que u'^2 sea no negativo.

En este caso, los **puntos críticos** son $v = 0$, $u = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \dots$).

Los puntos con n par tienen $h = -2\alpha$ y los puntos con n impar $h = 2\alpha$.

En este último caso, las **separatrices** satisfacen $v = \pm\sqrt{2\alpha}\sqrt{1 + \cos u}$ y conectan estos puntos críticos (puntos de silla) por encima y por debajo del eje u en el plano de fase (u, v) .

If $|h| < 2\alpha$, las curvas (5) son cerradas y envuelven los puntos críticos $v = 0$, $u = 2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) y la amplitud A satisface $2\alpha \cos A + h = 0$.

El **periodo de las oscilaciones** asociadas con estas curvas cerradas es

$$P = 4 \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{2\alpha \cos x + h}} = \frac{4}{\sqrt{2\alpha}} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos A}}. \quad (6)$$

Reemplazando x mediante $\sin \frac{x}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \theta$, obtenemos

$$P = \frac{4}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \theta}} = \frac{4}{\sqrt{\alpha}} K(\sin^2 A),$$

y el periodo se incrementa con la **amplitud** A .

$K(m)$ es la integral elíptica completa de primer orden [1]

Si $h > 2\alpha$, (5) indica que u' nunca se anula, y las trayectorias son curvas abiertas tal y como se muestran en la Figura 1.

Las soluciones del PVF son trayectorias que empiezan en $x = 0$ en el eje v ($u = 0$) y acaban en la línea vertical $u = a$ para $x = L$.

Si $a > \pi$, solamente una trayectoria satisface estos requerimientos, obteniéndose

$$L = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2\alpha \cos x + h}}, \quad (7)$$

para un $h > 2\alpha$ apropiado dado por (7).

Si $0 < a < \pi$, puede haber varias trayectorias correspondientes a la solución del PVI, a saber, aquellas que satisfacen

$$L = nP(h_n) + \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2\alpha \cos x + h_n}}, \quad (8)$$

para $n = 0, 1, \dots, N$, donde $P(h)$ es el periodo dado por (6) y h_n es un número apropiado entre 0 y 2α .

n es el número de veces que la trayectoria rodea al origen a lo largo de la rbita cerrada

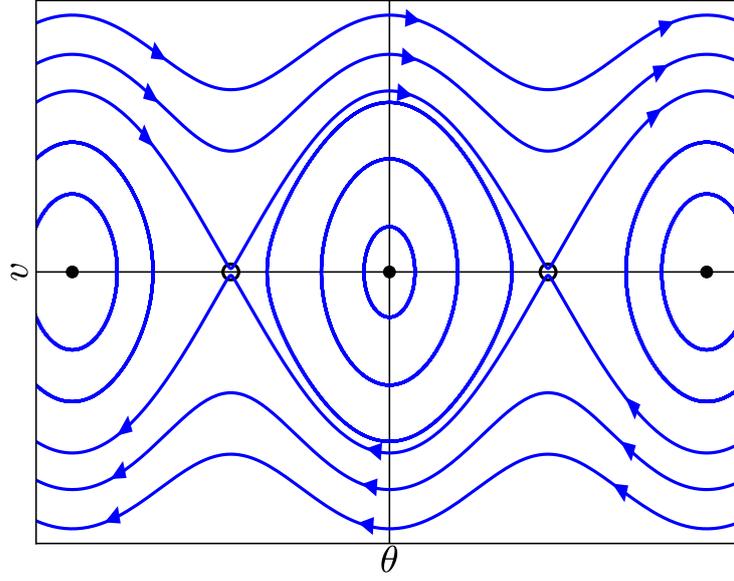


FIG. 1: Retrato fásico del péndulo no amortiguado $x = u$, $v = u'$.

correspondiente a h_n . Cuanto mayor sea L , mayor ser el número entero N .

Del mismo modo, hay trayectorias que alcanzan $u = a$ con pendiente negativa y satisfacen

$$L = \left(n + \frac{1}{2}\right)P(h'_n) - \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2\alpha \cos x + h'_n}}, \quad (9)$$

para algún h'_n apropiado.

Hay casos en los que podemos garantizar que el PVF tiene **una única solución**:

Teorema. Sean $f(x, u, v)$, $\partial f/\partial u$ y $\partial f/\partial v$ funciones continuas en la región $R = \{(x, u, v) : x_0 \leq x \leq x_1, -\infty < u < \infty, -\infty < v < \infty\}$.

Si

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, u, v) > 0, \quad (x, u, v) \in R, \quad (10)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x, u, v) \right| \leq M, \quad (x, u, v) \in R, \quad (11)$$

para una constante positiva M , entonces el PVF

$$u'' = f(x, u, u'), \quad u(x_0) = a, \quad u(x_1) = b \quad (12)$$

tiene una única solución $u = u(x)$ en $x_0 \leq x \leq x_1$.

Para el PVF lineal dado por la EDO (1) con $a_1(x)$, $a_0(x)$ continuas y condiciones de frontera $u(x_0) = a$, $u(x_1) = b$, existe una única solución siempre que $a_0 < 0$ (esto **no** se cumple en el **ejemplo 1**, dado que en este caso $a_0 = 1$).

En el **ejemplo 2**, $\partial f / \partial u = -\alpha \cos u$ es negativa para $|u| < \pi/2$ y por tanto **las conclusiones del teorema no son aplicables**.

B. Material suplementario: Método del disparo para PVF lineales

Nos restringiremos a PVFs con EDOs de segundo orden lineales tales como

$$u'' = p(x)u'(x) + q(x)u + r(x), \quad u(a) = \alpha, u(b) = \beta, \quad (13)$$

con $q(x) > 0$.

Para resolver numéricamente el PVF (13), usamos el **principio de superposición** en el PVF para calcular **numéricamente** las soluciones únicas de dos PVI's diferentes :

$$v'' = p(x)v'(x) + q(x)v + r(x), \quad v(a) = \alpha, v'(a) = 0, \quad (14)$$

y

$$w'' = p(x)w'(x) + q(x)w, \quad w(a) = 0, w'(a) = 1, \quad (15)$$

Entonces

$$u(x) = v(x) + Kw(x) \quad (16)$$

es una solución de la EDO en (13) que satisface las **condiciones de frontera**

$$\begin{aligned} u(a) &= v(a) + Kw(a) = \alpha + 0 = \alpha, \\ u(b) &= v(b) + Kw(b). \end{aligned} \quad (17)$$

Ahora usaremos otra condición de frontera para calcular K : $v(b) + Kw(b) = \beta$ que da $K = [\beta - v(b)]/w(b)$ supuesto $w(b) \neq 0$, y por lo tanto

$$u(x) = v(x) + \frac{\beta - v(b)}{w(b)}w(x). \quad (18)$$

Dado que $q(x) > 0$, el PVF (13) cumple las condiciones del teorema y el caso problemático $w(b) = 0$ no puede darse.

Ahora, $v(x)$ y $w(x)$ satisfacen PVI's cuyas soluciones numéricas pueden encontrarse usando, por ejemplo, un **método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4)**

Podemos calcular el coeficiente K en (18) y obtener la solución numérica usando la última fórmula.

Esto es el llamado **método del disparo** para PVF's **lineales**.

Para EDOs de segundo orden **no lineales** con condiciones de frontera como en (13), el método del disparo consiste en resolver el PVI asociado a la misma EDO con condiciones iniciales $u(a) = \alpha$, $u'(a) = \mu$ para un μ dado.

Llamemos $U(x; \mu)$ la solución resultante que se calcula numéricamente usando un método (por ejemplo, RK4). Entonces $U(b; \mu)$ se calcula numéricamente y se compara con el valor requerido β . Si no es el mismo, μ se cambia y se repite el proceso hasta que $U(b; \mu) = \beta$ se satisface.

-
- [1] M. Abramowitz & I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions. Dover, N. Y., 1965.
- [2] W.E. Boyce and R.C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems. 9th ed. John Wiley & Sons, N.Y. 2009. Chapter 10.
- [3] J. H. Mathews & K. D. Fink, Métodos numéricos con MATLAB. 3rd ed. Prentice Hall, 2000. Chapter 9.