Cálculo Diferencial Aplicado

TEMA 5:

Series de Fourier y separación de variables: Ecuación del calor.

Autores:

Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin, Rocío Vega

Departamento de Ciencia e Ingeniería de Materiales e Ingeniería Química,

Universidad Carlos III de Madrid,

Grado en Ingeniería Informática y

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas.

I. INTRODUCCIÓN: CLASIFICACIÓN DE EDPS DE SEGUNDO ORDEN

Las EDPs de segundo orden lineales describen frecuentemente muchos fenómenos en Ingeniería. Entre ellos, la **ecuación del calor** (EDP **parabólica**), la **ecuación de onda** (EDP **hiperbólica**) y la **ecuación de Laplace** (EDP **elíptica**) tienen una importancia primordial ya que son paradigmas de fenómenos que ocurren en muchos campos diferentes.

Dada una EDP general de segundo orden lineal con coeficientes constantes, a_{ij}, b_i, c,

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \sum_i b_i\partial_{x_i}u + cu = F(x,y), \tag{1}$$

nos gustaría saber qué condiciones iniciales y/o valores en la frontera convertirían la solución $u(x,y)$ (con $x_1 = x$, $x_2 = y$) en solución única.

Siempre podemos seleccionar a_{ij} de modo que $a_{ij} = a_{ji}$.

La primera idea podría ser hacer un **cambio de variables** en la ecuación (1) tal que esta EDP adquiriese alguna **forma canónica**.

Sea pues

$$x_i = \sum_{j=1}^{2} R_{ij}\xi_j, \quad \xi_i = \sum_{j=1}^{2} R_{ij}^{-1}x_j, \tag{2}$$

un cambio de variables de (x_1, x_2) a ξ_1, ξ_2 (con $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$).

Insertando (2) en (1), encontramos

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}R_{ki}^{-1}R_{lj}^{-1}\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_l}u + \sum_{i,k=1}^{2} b_iR_{ki}^{-1}\partial_{\xi_k}u + cu = F. \tag{3}$$

Dado que la matriz de los coeficientes a_{ij} es simétrica, tiene autovalores reales λ_i y puede ser diagonalizada mediante una matriz ortogonal $\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T$.

Seleccionando esta matriz para el cambio de variables (2),

$$\sum_{i,j,=1}^{2} a_{ij}R_{ki}^{-1}R_{lj}^{-1} = \left(\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{R}}^{-1})^T\right)_{kl} = \left(\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}\right)_{kl} = \lambda_k\delta_{kl}.$$

Entonces la ecuación (1) se convierte en

$$\sum_{k=1}^{2} \lambda_k\partial_{\xi_k}^2u + \sum_i b_iR_{ik}\partial_{\xi_k}u + cu = F. \tag{4}$$

Dependiendo de los autovalores, tenemos los siguientes **casos**:

i) $\det\underline{\underline{A}} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, entonces $\lambda_1\lambda_2 = det\underline{\underline{A}} < 0$, por tanto $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

La EDP se llama ***hiperbólica***.

Reescalando $\Xi_1 = |\lambda_1|^{-1/2}\xi_1$ y $\Xi_2 = \lambda_2^{-1/2}\xi_2$, esta EDP se puede escribir como

$$-\partial^2_{\Xi_1} u + \partial^2_{\Xi_2} u = \ldots, \tag{5}$$

donde hemos omitido todos los términos de primer orden o sin derivadas.

La ecuación de onda es una EDP hiperbólica típica y se pueden imponer condiciones iniciales (concretamente **dos condiciones iniciales**) y **condiciones de frontera** de modo que se pueda obtener una **solución única**.

ii) $\det\underline{\underline{A}} = \lambda_1\lambda_2 > 0$.

Los dos autovalores son ambos positivos o ambos negativos.

La EDP se llama ***elíptica***.

Reescalando $\Xi_1 = |\lambda_1|^{-1/2}\xi_1$ y $\Xi_2 = |\lambda_2|^{-1/2}\xi_2$, esta EDP se puede escribir como

$$\partial^2_{\Xi_1} u + \partial^2_{\Xi_2} u = \ldots. \tag{6}$$

La ecuación de **Laplace** y la de **Poisson** son ecuaciones elípticas típicas. solamente se pueden imponer **condiciones de frontera** para obtener una **solución única**.

iii) El determinante de la matriz de los coeficientes es cero y por tanto uno de los autovalores es nulo. Por ejemplo, $\lambda_1 = 0$.

Entonces la EDP se llama ***parabólica***.

Reescalando $\Xi_2 = \lambda_2^{-1/2}\xi_2$, esta EDP se puede escribir como

$$\partial^2_{\Xi_2} u = \ldots. \tag{7}$$

La ecuación del calor es una EDP parabólica típica y **condiciones de frontera** má **una condición inicial** (solamente hay una derivada con respecto a ξ_1) pueden ser impuestas para obtener una **solución única**.

Una clasificación similar se puede encontrar cuando u depende de **más de dos variables**. Para n variables independientes, las **ecuaciones hiperbólicas** corresponden a una matriz de coeficientes que tiene $(n-1)$ autovalores positivos (resp. negativos) y un autovalor negativo (resp. positivo).

Las **ecuaciones elípticas** se obtienen cuando todos los autovalores son no nulos y tienen el mismo signo.
Las **ecuaciones parabólicas** tienen $(n-1)$ autovalores del mismo signo más un autovalor nulo.

Ejemplo 1.
Clasifiquemos la ecuación

$$\partial_x^2 u + 2\partial_x \partial_y u - \partial_y^2 u = \partial_x u + 1.$$

La matriz de los coeficientes tiene componentes $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 1$, $a_{22} = -1$, con determinante negativo -2. Un autovalor es positivo, el otro es negativo. De hecho, la ecuación de los autovalores es $\lambda^2 - 2 = 0$. Por tanto, $\lambda = \pm\sqrt{2}$ y la ecuación **es hiperbólica**.

Una clasificación similar se puede hacer para **ecuaciones con coeficientes variables**. Los cambios de variables conducen a fórmulas más complicadas, pero si solamente seguimos la pista de de las derivadas segundas de u, el primer término de la ecuación (3) es todavía el mismo y podemos la matriz de los coeficientes del mismo modo. La diferencia ahora es que los autovalores no serán funciones constantes.
Ejemplo 2.
Clasifiquemos la **ecuación de Tricomi**

$$\partial_y^2 u - y\partial_x^2 u = 0.$$

La matriz de los coeficientes tiene componentes $a_{11} = -y$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$. El determinante de la matriz es $-y$ y por lo tanto la ecuación de Tricomi es **hiperbólica** para $y > 0$, **elíptica** para $y < 0$ y **parabólica** para $y = 0$.

II. ECUACIÓN DEL CALOR

Comenzaremos estudiando la **ecuación del calor en cuerpos sólidos**.
La tasa de cambio de la densidad de energía interna en una **región espacial** R (que no cambia con el tiempo) en el espacio tridimensional es igual a la energía térmica que fluye a través de las fronteras ∂R por unidad de tiempo más la energía térmica por unidad de tiempo $\int_R Q(\underline{x}, t)\, dV$ producida por fuentes internas.

La energía interna es la integral de volumen sobre R de la densidad de masa ρ multiplicada por el **calor específico** c y la **temperatura** $u(\underline{x}, t)$.

La energía térmica que sale de la región R por unidad de tiempo y por unidad de área de superficie es la componente normal exterior del flujo de calor: $\underline{q} \cdot \underline{n}$, donde $\underline{n}$ es el vector normal exterior (saliente): $\underline{q} \cdot \underline{n} > 0$ significa que el calor está saliendo de la región R, mientras que si $\underline{q} \cdot \underline{n} < 0$ el calor está fluyendo hacia R.

Entonces la conservación de la energía da

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho c u \, dV = - \oint_{\partial R} \underline{q} \cdot \underline{n} \, dS + \int_R Q(\underline{x}, t) \, dV. \tag{8}$$

El teorema de la divergencia establece que $\oint_{\partial R} \underline{q} \cdot \underline{n} \, dS = \int_R \nabla \cdot \underline{q} \, dV$ que, insertado en (8), produce

$$\int_R \left(\rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{q} - Q(\underline{x}, t) \right) dV = 0. \tag{9}$$

Aquí hemos asumido que ρ y c son independientes del tiempo y que R es una región arbitraria. Asumiendo también que el integrando en la ecuación (9) es continuo, éste debe ser identicamente nulo.

Esto da

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{q} + Q(\underline{x}, t). \tag{10}$$

Los experimentos indican que el calor fluye desde la parte caliente a la fría en los cuerpos en contacto, intentando igualar sus temperaturas. Esto se expresa mediante la **ley de Fourier** relacionando el flujo de calor con el gradiente de la temperatura

$$\underline{q} = -K \nabla u. \tag{11}$$

K es la **conductividad térmica**.

La ley de Fourier es una relación constitutiva entre $\underline{q}$ y u.

Sustituyendo (11) en (10), obtenemos la ecuación en derivadas parciales (EDP) para la **incógnita temperatura** $u(\underline{x}, t)$:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla u) + Q(\underline{x}, t), \tag{12}$$

en la que ρ, c, K y Q, se suponen funciones conocidas.

Si ρ, c y K son constantes, podemos reescribir (12) como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u + f(\underline{x}, t), \tag{13}$$

donde $k = K/(\rho c)$ es la **difusividad térmica** y $f = Q/(\rho c)$ tiene unidades de temperatura por unidad de tiempo.

Si el cuerpo es una **barra delgada** dirigida a lo largo del eje x, (13) se convierte en la **ecuación del calor uni-dimensional**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t).$$

Esta ecuación tiene dos derivadas en la variable espacial y una derivada en la variable temporal, por tanto necesitamos especificar **una condición inicial** y **condiciones de frontera en dos puntos distintos** para que podamos esperar tener una **solución única**.

Por ejemplo, si especificamos la temperatura nula en los dos extremos de la barra y una temperatura inicial igual a $u_0(x)$, obtenemos el siguiente **problema de valor inicial con condiciones de contorno (PVICC)** :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > t_0, \qquad (14)\\
u(x,t_0) &= u_0(x), \quad 0 < x < l,\\
u(0,t) &= 0, \quad t > t_0,\\
u(l,t) &= 0, \quad t > t_0.
\end{aligned}$$

Establecer valores nulos de la incógnita en las fronteras da lugar a un problema llamado **problema de *Dirichlet* homogéneo** (valores no nulos de la temperatura en los extremos de la barra constituye un **problema de Dirichlet no homogéneo**).

Por supuesto, podríamos haber prescrito dos temperaturas no nulas en los extremos de la barra, por ejemplo $u(0,t) = T_0$ y $u(l,t) = T_l$.
Haciendo el cambio $u(x,t) = T_0 + (T_l - T_0)x/l + v(x,t)$ da lugar a la misma ecuación (14) para v y ahora $v = 0$ en los dos extremos $x = 0, l$.

Existen otras condiciones de frontera razonables: **flujo de calor fijado en los extremos** o **ley de enfriamiento de Newton**.
Por ejemplo, que los **extremos** estén **aislados** significa que el flujo en ellos es nulo. En

consecuencia, la **ley de Fourier** nos dice que tenemos que reemplazar las condiciones de frontera por

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= 0, \quad t > t_0,\\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) &= 0, \quad t > t_0.\end{aligned} \tag{15}$$

Estas condiciones se conocen como **condiciones de flujo cero** o ***condiciones de frontera de tipo Neumann*** **homogéneas** (valores no nulos del flujo de calor en los extremos de la barra constituye un problema de Neumann no homogéneo).

Por último, si los extremos de la varilla están abiertos en una habitación cuya temperatura es menor que la de la varilla, el calor fluye desde la varilla hacia la habitación a una velocidad proporcional a la diferencia de temperatura con la habitación (**ley de enfriamiento de Newton**). Las condiciones de frontera resultantes son

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= -h[u(0,t)-u_r], \quad t > t_0,\\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) &= h[u(l,t)-u_r], \quad t > t_0,\end{aligned} \tag{16}$$

las cuales se denominas **condiciones de frontera de *Robin* no homogéneas** (o **mixtas**). Si $u_r = 0$, se obtienen las **condiciones de frontera de Robin homogéneas**.

A. Método de las series de Fourier para la ecuación del calor

1. *Separación de variables para la ecuación del calor homogénea*

Comenzaremos tratando de resolver la ecuación del calor homogénea (14) con $f = 0$. Con este fin, buscaremos **soluciones especiales** de la forma

$$u_p(x,t) = X(x)T(t), \tag{17}$$

que son productos de funciones que dependen de x y funciones que dependen de t.

Insertamos (17) en la ecuación del calor homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Longrightarrow T'(t)X(x) = T(t)X''(x),$$

y dividimos el resultado por u_p, obteniendo así

$$\frac{T'(t)}{k\,T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{18}$$

El lado izquierdo de esta ecuación es una función de t y el lado derecho es una función de x. Por tanto ambos lados son iguales a una constante (porque derivando respecto de x la ecuación, el lado izquierdo se anula y por tanto la derivada respecto de x de $\frac{X''(x)}{X(x)}$ es cero, por tanto se tiene que $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$, una constante).
Entonces tenemos

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T'(t) = -\lambda k\,T(t). \tag{19}$$

λ se denomina la ***constante de separación***.

2. ***Problema de autovalores para*** $X(x)$

Las condiciones de frontera de tipo **Dirichlet** determinan que $X(0) = 0$ y $X(l) = 0$, por tanto la función espacial $X(x)$ satisface el **PVF**:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{20}$$
$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Obviamente $X(x) = 0$ es una solución de (20), pero estamos interesados en saber si (20) tiene **soluciones no nulas** para algún valor particular de λ.
Este un típico ***problema de autovalores***: Sus soluciones no nulas se denominan ***autofunciones*** y las constantes de separación correspondientes λ son los **autovalores**.
Asumiendo que $\lambda > 0$, la ecuación (20) tiene por **solución general**

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Sustituyendo esta solución en la primera condición de contorno, obtenemos $0 = X(0) = c_1$.
Entonces encontramos que $X(x) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$ y la segunda condición de contorno da

$$c_2 \sin(l\sqrt{\lambda}) = 0 \Longrightarrow l\sqrt{\lambda} = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

Hemos encontrado los siguientes **pares de autovalores y autofunciones** para la ecuación (20):

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{22}$$

Para cada una de estos autovalores, la solución de la EDO de la incógnita T en (19) es

$$T_n(t) = e^{-n^2\pi^2 kt/l^2}. \tag{23}$$

¿Existen otras autofunciones?

Se puede comprobar que la única solución de la ecuación (20) cuando $\lambda \leq 0$ es $X(x) = 0$.

Ahora que hemos encontrado infinitas soluciones particulares de la ecuación del calor homogénea con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, usaremos el **principio de superposición** para decir que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 kt/l^2} \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{24}$$

con coeficientes constantes a_n **es una solución de la ecuación del calor** (cuando esta serie converge) que satisface las condiciones de frontera de tipo Dirichlet.

Para **calcular los coeficientes** a_n, usamos la **condición inicial** en (24)

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{25}$$

Usando las **integrales trigonométricas**:

$$\begin{aligned}\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx &= \frac{1}{2}\int_0^l \left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right]dx \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(m-n)\pi x/l]}{(m-n)\pi} - \frac{\sin[(m+n)\pi x/l]}{(m+n)\pi}\right]\Bigg|_0^l &= \frac{l}{2}\delta_{mn} = \frac{l}{2}\begin{cases} 1 & m = n, \\ 0 & m \neq n, \end{cases}\end{aligned} \tag{26}$$

la ecuación (25) da lugar a la fórmula

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{27}$$

El resultado (26) indica que las autofunciones $X_n(x) = \sin(n\pi x/l)$ y $X_m(x) = \sin(m\pi x/l)$ con $n \neq m$ son **ortogonales** para el **producto escalar**:

$$(f,g) = \int_0^l f(x)g(x)\,dx. \tag{28}$$

Poniendo juntas (24) y (27), encontramos la solución formal

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l u_0(s)\sin\frac{n\pi s}{l}ds\right)e^{-n^2\pi^2 kt/l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{29}$$

Hay varias cuestiones que deberíamos ser capaces de responder antes de llegar a estar satisfechos con la solución dada por (29):

1. ¿Cuáles son las funciones $u_0(x)$ para las que la ***serie de Fourier de senos*** (25) con coeficientes (27) converge? ¿Qué entendemos por convergencia?

2. ¿Es la serie de Fourier de senos (29) una fución diferenciable que resuelve el PVICC (14) para $f = 0$?

Trataremos estas cuestiones más tarde. Ahora es suficiente con decir que, basta que $u_0(x) = f(x)$ is sea ***suave a trozos*** (esto significa que $f(x)$ y $f'(x)$ son ambas continuas en el intervalo $(0, l)$ excepto en una cantidad finita de puntos ξ donde tienen discontinuidades de salto finito, $[f(\xi)] \equiv \lim_{\epsilon \to 0+}[f(\xi + \epsilon) - f(\xi - \epsilon)] \neq 0$), la serie de Fourier de senos converge a $f(x)$ en todos los puntos donde $f(x)$ es continua, y converge a el valor medio $[f(x+) + f(x-)]/2$ en los puntos donde $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito.
Esta noción de ***convergencia puntual*** será suficiente para nuestros propósitos en este curso.
Téngase en cuenta que existen otras nociones de convergencia importantes que pueden ser bastante útiles en ciertos casos.

3. Ecuación del calor homogénea con condiciones de frontera de tipo Neumann

Si las condiciones de frontera son (15) (Neumann) en lugar de Dirichlet, una repetición del procedimiento seguido para hallar las autofunciones (22), da los siguientes pares de autovalores y autofunciones [2].

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{30}$$

en lugar de (22).
Esto da lugar a la solución en **serie de Fourier de cosenos**

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l u_0(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l u_0(s)\cos\frac{n\pi s}{l}ds\right)e^{-n^2\pi^2kt/l^2}\cos\frac{n\pi x}{l}. \tag{31}$$

A diferencia del caso con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, la temperatura converge a la media del perfil inicial de temperatura y no a la temperatura nula: **una varilla aislada térmicamente recuerda algunas características de su temperatura inicial incluso después de un tiempo infinito.**

4. Ecuación del calor homogénea con condiciones de contorno periódicas

Supongamos que tenemos una varilla delgada curvada y cerrada como un **anillo de radio grande**.

El anillo abarca el intervalo $-l < x < l$ y tenemos que resolver la **ecuación del calor homogénea con condiciones de contorno periódicas**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \begin{cases} u(-l,t) = u(l,t), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-l,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t). \end{cases} \tag{32}$$

Ahora el problema de autovalores es (20) con condiciones de contorno periódicas dadas en (32).

Insertando la solución general de la ecuación (20),

$$X(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

en las condiciones de frontera periódicas, obtenemos

$$2c_2\sin(l\sqrt{\lambda}) = 0, \quad 2c_1\sqrt{\lambda}\sin(l\sqrt{\lambda}) = 0,$$

dando lugar a los siguientes **autovalores** y **autofunciones**:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad X_n^{(1)}(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad X_n^{(2)}(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{33}$$

Nótese que el autovalor $\lambda_0 = 0$ tiene una única autofunción $X_0 = 1$, mientras que el resto de autovalores tienen asociados dos autofunciones independientes cada uno, por tanto tienen multiplicidad igual a dos.

De acuerdo con el **principio de superposición**, la **solución general de la ecuación del calor homogénea** es ahora

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}e^{-n^2\pi^2kt/l^2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-n^2\pi^2kt/l^2}. \tag{34}$$

Usando la **ortogonalidad** de las autofunciones

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ l & n = m \neq 0 \\ 2l & n = m = 0 \end{cases} \tag{35}$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ l & n = m \neq 0 \end{cases} \tag{36}$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{m\pi x}{l} dx = 0, \tag{37}$$

en la **condición inicial**, encontramos los **coeficientes de Fourier**

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} u_0(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} u_0(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \end{aligned} \tag{38}$$

Las ecuaciones (34) y (38) dan lugar a

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} u_0(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{ e^{-n^2\pi^2kt/l^2}\Bigg[\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} u_0(s)\sin\frac{n\pi s}{l}\,ds\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \\ &+ \left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} u_0(s)\cos\frac{n\pi s}{l}\,ds\right)\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg]\Bigg\} \\ &= \int_{-l}^{l}\left\{\frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2kt/l^2}\cos\frac{n\pi(x-s)}{l}\right\} u_0(s)\,ds. \end{aligned} \tag{39}$$

Cuando $t \to \infty$, $u(x,t) \to (2l)^{-1}\int_{-l}^{l} u_0(s)ds$, que es la temperatura de equilibrio de la varilla circular: es una media de la distribución de temperatura inicial.

5. ***Problemas no homogéneos***

Consideremos el **PVICC**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > t_0, && (40) \\ u(x,t_0) &= u_0(x), \quad 0 < x < l, && (41) \\ u(0,t) &= T_0(t), \quad t > t_0, && (42) \\ u(l,t) &= T_1(t), \quad t > t_0 && (43) \end{aligned}$$

Aquí **no podemos aplicar separación de variables**. Sin embargo, podemos **expandir la solución en serie de Fourier de senos** (adecuada para las condiciones de contorno de tipo Dirichlet) como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{44}$$

donde ahora no conocemos su dependencia en el tiempo.

Nótese que la ortogonalidad de las funciones seno da la fórmula

$$b_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \tag{45}$$

para los coeficientes de Fourier de la solución.

Ahora multiplicamos la ecuación (40) por $(2/l)\sin(n\pi x/l)$ e integramos el resultado desde 0 hasta l, obteniendo así

$$\begin{aligned}\frac{db_n}{dt} - \frac{2k}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big|_0^l + \frac{2n\pi k}{l^2}\cos\frac{n\pi x}{l}u(x,t)\Big|_0^l + \frac{2kn^2\pi^2}{l^3}\int_0^l u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \\ = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\end{aligned}$$

después de integrar por partes dos veces.

Usando las condiciones de contorno (42) y (43) y la fórmula (45) en esta ecuación, encontramos la EDO:

$$\frac{db_n}{dt} + \frac{n^2\pi^2 k}{l^2}b_n = \frac{2kn\pi}{l^2}[T_0(t) - (-1)^n T_1(t)] + f_n(t), \quad f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{46}$$

Esta es una **EDO lineal de primer orden** que debe ser resuelta junto con la **condición inicial**

$$b_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x,)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{47}$$

La solución de este PVI es

$$b_n(t) = b_n(0)e^{-n^2\pi^2 kt/l^2} + \int_0^t \left\{\frac{2kn\pi}{l^2}[T_0(s) - (-1)^n T_1(s)] + f_n(s)\right\} e^{-n^2\pi^2 k(t-s)/l^2}ds. \tag{48}$$

Las ecuaciones (44) y (48) son la solución del PVICC (40)-(43) [2].

B. Propiedades de las series de Fourier

Consieremos la **serie de Fourier** asociada a la función $f(x)$ en el intervalo $(-1,1)$:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\pi x) + b_n\sin(n\pi x)], \tag{49}$$

donde los **coeficientes** están dados por las fórmulas usuales:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx, \\ a_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx, \\ b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx. \end{aligned} \tag{50}$$

En (49), el símbolo $\sim$ significa que $f(x)$ está en el lado izquierdo y que la serie de Fourier de $f(x)$ (en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$) está en el lado derecho (incluso aunque las serie diverja) pero las dos funciones pueden ser complétamente diferentes. El **símbolo** $\sim$ se lee como "**tiene la serie de Fourier (en un intervalo dado)**".

1. Series de Fourier en unidades con dimensiones

En unidades con dimensiones, la función $f(x)$ se define en un intervalo $(-l, l)$. Reemplazando x/l en lugar de x en (49) y (50), obtenemos

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right], \tag{51}$$

con coeficientes dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx. \end{aligned} \tag{52}$$

2. Teorema de la convergencia puntual

Si $f(x)$ es **suave a trozos** en el intervalo $-l \leq x \leq l$, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ converge

1. a la **extensión periódica de** $f(x)$, donde la extensión periódica sea continua;

2. a la media de los dos límites,

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

   donde la extensión periódica tiene una discontinuidad de salto.

Aquí una **función suave a trozos** $f(x)$ **significa** que f y df/dx son ambas continuas a trozos, esto es: (i) son continuas excepto en una cantidad finita de puntos en el intervalo $(-l, l)$; (ii) cada discontinuidad en $(-l, l)$ es una discontinuidad de salto; (iii) sus límites cuando $x \to -l+$ y cuando $x \to l-$ existen.

Para una demostración del teorema de la convergencia puntual véase el capítulo 9 de la referencia [1].

Los siguientes resultados son una consecuencia directa le teorema de la convergencia puntual de Fourier:

a) Si $f : (-l, l) \to \mathbb{R}$ es continua y suave a trozos, entonces su extensión periódica es continua en todas partes excepto (posiblemente) en los puntos $\pm l, \pm 3l, \ldots$
Se sigue que la serie de Fourier de f converge a $f(x)$ para todo $-l < x < l$.

b) Si $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ es continua y suave a trozos, y $f(-l) = f(l)$, entonces su extensión periódica es continua en todo punto y por tanto la serie de Fourier de f converge a $f(x)$ para todo $-l \leq x \leq l$.

c) Si $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ es continua y suave a trozos, entonces f_{odd}, que es la **extensión periódica de su extensión impar**, es continua en todas partes excepto (posiblemente) en los puntos $0, \pm l, \pm 2l, \ldots$.
Como consecuencia, la **serie de Fourier de senos** de f converge a $f(x)$ para todo $0 < x < l$.

d) If $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ es continua y suave a trozos, y $f(0) = f(l) = 0$, entonces f_{odd} es continua en todas partes. Entonces, la serie de Fourier de senos de f converge a $f(x)$ para todo $0 \leq x \leq l$.

e) Si $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ es continua y suave a trozos, entonces f_{even}, que es la **extensión periódica de su extensión par**, es continua en todas partes. Entonces la serie de Fourier de cosenos de f converge a $f(x)$ para todo $0 \leq x \leq l$.

Se puede probar que cuando las extensiones periódicas de una función suave a trozos $f(x)$, o de sus extensiones par o impar, son continuas, la serie de Fourier correspondiente converge unifórmemente a f, [1]. Entonces la serie de Fourier se puede derivar término a término y la serie resultante converge a $f'(x)$ siempre que la derivada sea continua.

3. Esbozo de las series de Fourier

Podemos esbozar la serie de Fourier dibujando la extensión periódica correspondiente y marcando con una cruz los puntos a los que converge la serie en los puntos de discontinuidad de la extensión periódica de $f(x)$.

4. Derivación término a término de la serie de Fourier

Si la extensión periódica de una función continua tiene una serie de Fourier con discontinuidades de salto en los extremos del intervalo $(-l, l)$, entonces la serie no puede ser derivada término a término.
Para ver por qué, tomemos la serie de Fourier de $f'(x)$:

$$f'(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]. \tag{53}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier se pueden calcular mediante integración por partes usando (52) para simplificar el resultado:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f'(x) dx = \frac{f(l) - f(-l)}{2l}, \\ A_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{f(l) - f(-l)}{l} \cos(n\pi) + n\pi b_n, \\ B_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = -n\pi a_n. \end{aligned} \tag{54}$$

Claramente es **necesario** que $f(-l) = f(l)$ para que la derivación término a término se mantenga.

5. Integración término a término de la serie de Fourier

Podemos integrar término a término la serie de Fourier de una función suave a trozos $f(x)$ y el resultado es una serie convergente que converge siempre a la integral de $f(x)$ para $-l \leq x \leq l$, incluso si la serie de Fourier original tiene discontinuidades de salto.
La nueva serie formada integrando término a término es continua, pero puede que no sea una serie de Fourier (véase una demostración de este resultado en la sección 3.5 de la referencia [2]).

III. MATERIAL SUPLEMENTARIO: SOLUCIÓN POR DIFERENCIAS FINITAS DE LA ECUACIÓN DEL CALOR

Queremos hallar la **solución numérica** del siguiente problema de Dirichlet en unidades con dimensiones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\
u(x,t_0) &= f(x), \quad 0 < x < l, \\
u(0,t) &= 0, \quad t > 0, \\
u(l,t) &= 0, \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{55}$$

Este problema es bastante simple y es indiferente reescribirlo en unidades dimensionales. Pero hay que tener en mente que quitar dimensiones antes de resolver numéricamente es una buena idea [2].

A. Esquema explícito

El esquema numérico más sencillo consiste en usar **diferencias avanzadas (”forward”)** en la variable temporal y **diferencias centradas** en la variable espacial:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_j) = \frac{u(x_j,t_j+\Delta t) - u(x_j,t_j)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,\tilde{t}_j), \tag{56}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_j) = \frac{u(x_j+\Delta x,t_j) + u(x_j-\Delta x,t_j) - 2u(x_j,t_j)}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{x}_j,t_j), \tag{57}$$

donde $t_j < \tilde{t}_j < t_j + \Delta t$, $x_j < \tilde{x}_j < x_j + \Delta x$, y hemos discretizado el tiempo y el espacio de acuerdo con:

$0 = t_0 < t_1 = t_0 + \Delta t < \ldots < t_M = t_0 + M\Delta t = T$, y

$0 = x_0 < x_1 = x_0 + \Delta x < \ldots < x_N = x_0 + N\Delta x = l$.

Ahora sustituimos (56) y (57) en (55), descartamos los términos de error y usamos la notación

$$u(x_j,t_m) = U_j^m \tag{58}$$

(indicando la temperatura en el punto x_j de la malla en el instante de tiempo t_m), en el resultado.

Obtenemos el siguiente **esquema en diferencias**:

$$U_j^{m+1} = U_j^m + r(U_{j+1}^m + U_{j-1}^m - 2U_j^m), \tag{59}$$

$$U_j^0 = f(x_j) \equiv f_j \qquad (j = 1, \ldots, N-1), \tag{60}$$

$$U_0^m = 0, \quad U_N^m = 0 \quad (m = 1, \ldots, M-1), \tag{61}$$

donde r es un **parámetro adimensional**

$$r = k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}. \tag{62}$$

El esquema (59) avanza en el tiempo a partir de la condición inicial (60) y tiene en cuenta las condiciones de frontera de tipo Dirichlet (61) para $j = 0$ y $j = N$.
Para calcular la temperatura en (x_j, t_{m+1}) necesitamos al temperatura en (x_j, t_m) y en los nodos adyacentes (x_{j-1}, t_m) y (x_{j+1}, t_m).
Claramente el **dominio de influencia** de un punto (x_j, t_m) es una región triangular cuyos bordes se expanden a la **velocidad numérica**

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{k\Delta x}{r(\Delta x)^2} = \frac{k}{r\,\Delta x}. \tag{63}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, con r fija, la velocidad numérica tiende a infinito, lo cual concuerda con el hecho de que **la ecuación del calor propaga las perturbaciones con velocidad infinita**.

B. Análisis de estabilidad

El esquema discreto (59) se puede resolver por **separación de variables**

$$U_j^m = e^{i\alpha x} R^{t/\Delta t} = e^{i\alpha j \Delta x} R^m. \tag{64}$$

Insertando (64) en (59) y cancelando los términos $e^{i\alpha x} R^m$, obtenemos

$$R = 1 + r(e^{i\alpha\Delta x} + e^{-i\alpha\Delta x} - 2) = 1 - 2r[1 - \cos(\alpha\Delta x)] = 1 - 4r\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta x}{2}\right). \tag{65}$$

Hemos usado la fórmula de Euler: $e^{\pm i\omega} = \cos(\omega) \pm i\sin(\omega)$, with $\omega \in \mathbb{R}$.
R toma el mismo valor para valores positivos o negativos de α. Por tanto, se puede usar una combinación lineal de $e^{\pm i\alpha x}$ como una solución.
La condición de frontera $R_0^m = 0$ implica que $\sin(\alpha x)$ es una solución apropiada, mientras

que $R_N^m = 0$ implica que $\alpha = n\pi/l = n\pi/(N\Delta x)$, $n = 1, \ldots, N-1$.
Encontramos pues que

$$U_j^m = \sin \frac{n\pi x}{l}\, R^m = \sin \frac{n\pi j}{N}\, R^m, \tag{66}$$

donde R viene dado por (65):

$$R_n = 1 - 2r\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi\Delta x}{l}\right)\right] = 1 - 4r\sin^2\left(\frac{n\pi}{2N}\right), \tag{67}$$

con $n = 1, \ldots, N-1$ y $n\Delta x = l$.
La **solución general** se encuentra aplicando el **principio de superposición**:

$$U_j^m = \sum_{n=1}^{N-1} \beta_n \sin \frac{n\pi x}{l} R_n^m, \quad R_n^m = \left[1 - 4r\sin^2\left(\frac{n\pi}{2N}\right)\right]^{t/\Delta t} \quad r = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}. \tag{68}$$

Los **coeficientes** β_n son determinados a partir de la condición inicial usando la **ortogonalidad** de las **autofunciones**.

Por otro lado, si $|R| < 1$, la solución del esquema discreto tiende a cero cuando $t \to \infty$ y se dice que el esquema numérico es ***estable***. En cualquier otro caso el esquema es ***inestable***.
Claramente (67) implica que $R_n \leq 1$, por tanto solamente debemos chequear que $R_n \geq -1$:

$$r \leq \frac{1}{2\sin^2 \frac{n\pi}{2N}}, \quad n = 1, \ldots, N-1. \tag{69}$$

Esta condición es cierta para todo n con tal de que

$$r \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{2\sin^2 \frac{(N-1)\pi}{2N}}. \tag{70}$$

Para valores grandes de N, se obtiene de todas formas que $r \leq 1/2$.
Si $r > 1/2$, entonces algún R_n puede llegar a ser menor que -1 y la solución numérica contendrá oscilaciones divergentes, que es una ***inestabilidad numérica***, y por tanto no refleja el comportamiento de la solución de la ecuación del calor.
La inestabilidad numérica se caracteriza por una oscilación que es divergente en la variable temporal, $R < -1$, y tiene oscilaciones rápidas en la variable espacial ($n = N-1$).
La **restricción** $r \leq 1/2$ da lugar a

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2k}, \tag{71}$$

que es una restricción muy práctica en cálculo numérico:

los pasos de tiempo no pueden ser demasiado grandes pues en caso contrario el esquema se vuelve inestable.

Si Δx es suficientemente pequeño, (71) implica que el paso de tiempo debe ser mucho más pequeño y por tanto el esquema de diferencias finitas explícito es bastante **caro computacionalmente**.

Para **minimizar** el tiempo de cómputo es buena idea tomar $r = 1/2$, por tanto (59) da lugar a

$$U_j^{m+1} = \frac{U_{j+1}^m + U_{j-1}^m}{2}, \tag{72}$$

y la temperatura en el tiempo $(m+1)\Delta t$ es la media de las temperaturas a la izquierda y a la derecha en el instante de tiempo anterior $m\Delta t$.

Nota: Análisis de estabilidad simplificado.

Si no imponemos las condiciones de frontera, $R \geq -1$ con R dado por (65), se llega a

$$r \leq \frac{1}{2\sin^2(\alpha\Delta x/2)},$$

y la condición $r \leq 1/2$ se obtiene de nuevo.

[1] M. S. Gockenbach, Partial differential equations. SIAM, 2002. Chapters 6 and 9.

[2] R. Haberman, Elementary applied partial differential equations. 3rd ed. Prentice Hall, 1998. Chapters 2, 3 and 8.