Cálculo Diferencial Aplicado

TEMA 6:

Series de Fourier y separación de variables: Ecuación de onda.

Autores:

Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin, Rocío Vega

Departamento de Ciencia e Ingeniería de Materiales e Ingeniería Química,

Universidad Carlos III de Madrid,

Grado en Ingeniería Informática y

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas.

I. ECUACIÓN DE ONDA 1D

1. *Derivación de la ecuación de onda*

Consideremos una cuerda inextensible que se ha desplazado una distancia vertical $u(x,t)$ desde su posición horizontal de reposo en el eje x. Sea $\theta(x,t)$ el ángulo que forma la cuerda con el eje x. Las fuerzas actuando en el segmento de cuerda entre x y $x+dx$ son fuerzas del cuerpo y las **tensiones** $T(x,t)$ y $T(x+\Delta x,t)$ son tangentes a la cuerda.
Estas fuerzas tienen una componente vertical $T(x+\Delta x,t)\sin\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\theta(x,t) + \rho(x)\Delta x Q(x,t)$ ($\rho(x)\Delta x$ es la masa del segmento de cuerda), y por lo tanto la **segunda ley de Newton** da

$$\rho(x)\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x+\Delta x,t)\sin\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\theta(x,t) + \rho(x)\Delta x Q(x,t). \quad (1)$$

Cuando $\Delta x \to 0$, (1) se obtiene

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}[T(x,t)\sin\theta(x,t)] = \rho(x)Q(x,t). \quad (2)$$

También se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tan\theta \Longrightarrow \sin\theta = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}, \quad (3)$$

que da lugar a

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[T(x,t)\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\right] = \rho(x)Q(x,t). \quad (4)$$

cuando se inserta en la ecuación (2).
Para ángulos pequeños, esta ecuación se convierte en lineal:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[T(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \rho(x)Q(x,t), \quad (5)$$

y tenemos por tanto una ecuación de onda no homogénea.
Para una cadena inextensible, T es constante y la ecuación (5) se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Q(x,t), \quad (6)$$

donde la constante $c = \sqrt{T/\rho}$ es la **velocidad de la onda** (que es constante para una cuerda uniforme).

Si las fuerzas del cuerpo están ausentes, obtenemos la **ecuación de onda unidimensional** (que es lineal y homogénea):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{7}$$

2. Condiciones de frontera

Esta ecuación tiene dos derivadas espaciales y dos temporales por tanto necesitamos especificar dos condiciones iniciales y dos condiciones de frontera en dos puntos diferentes para que podamos esperar que haya una única solución.

Por ejemplo, si los extremos de la cuerda están fijos, $u(0,t) = 0$ y $u(L,t) = 0$. Inicialmente, podemos especificar el perfil de la cuerda y su velocidad en cada punto: $u(x,0) = u_0(x)$, $\partial u(x,0)/\partial t = v_0(x)$.

Hemos obtenido el siguiente **problema de valor inicial con condiciones de frontera (PVICC)**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \qquad (8) \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad 0 < x < L, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= v_0(x), \quad 0 < x < L, \\ u(0,t) &= 0, \quad t > 0, \\ u(L,t) &= 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Este es un problema de **Dirichlet homogéneo**.

Otras condiciones de frontera interesantes aparecen cuando los extremos de la cuerda se unen a muelles armónicos de masa despreciable.

$$\begin{aligned} T\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - ku(0,t) &= -ku_0(t), \quad t > t_0, \\ -T\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) - ku(L,t) &= -ku_L(t), \quad t > t_0. \qquad (9) \end{aligned}$$

Estas son las condiciones de frontera de **Robin no homogéneas** cuando las posiciones en reposo de la cuerda, u_0 y u_L, son no nulas.

Nótese que ellas tienen la misma expresión matemática que las dadas por la **ley de enfriamiento de Newton**.

Si $k = 0$, los extremos de la cuerdad están libres y encontramos la condiciones de frontera de tipo **Neumann**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= 0, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) &= 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{10}$$

A. Método de las series de Fourier para la ecuación de onda

1. *Separación de variables para la ecuación de onda homogénea*

Empezaremos tratando de resolver la ecuación homogénea de onda (7).
Para ese fin, buscamos soluciones especiales de la forma

$$u_p(x,t) = X(x)T(t), \tag{11}$$

que son productos de funciones que dependen de x y funciones que dependen de t.
Insertamos (11) en (7) y dividimos el resultado por $c^2 u_p$, obteniendo

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \tag{12}$$

donde λ es la **constante de separación**.
El problema de **Dirichlet** (8) da lugar al mismo **problema de autovalores** que el de la ecuación del calor:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L, \tag{13}$$
$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

Por cada uno de estos autovalores, la solución general de la EDO para la incógnita T en (12) es

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{\pi nct}{L} + b_n \sin\frac{\pi nct}{L}. \tag{15}$$

¿Existen otras autofunciones?

Se puede comprobar que la única solución que tiene la ecuación (13) para $\lambda \leq 0$ es $X(x) = 0$.

Ahora que hemos encontrado una infinitud de **soluciones particulares** de la ecuación de ondas con codiciones de contorno de tipo Dirichlet, usamos el **principio de superposición** para decir que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi nct}{L} + b_n \sin \frac{\pi nct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{16}$$

con coefcientes constantes a_n y b_n es una **solución de la ecuación de onda** (siempre que esta serie converja) que satisface las condicones de contorno de **Dirichlet**.

Para calcular los **coeficientes** a_n, usamos las condiciones iniciales dadas en (8)

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{17}$$

$$v_0(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{18}$$

Usando las propiedades de **ortogonalidad** de la **serie de Fourier de senos**, encontramos:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \tag{19}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \tag{20}$$

Poniendo juntos (16), (19) y (20), encontramos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L u_0(s) \sin \frac{n\pi s}{l}\, ds \right) \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0(s) \sin \frac{n\pi s}{l}\, ds \right) \sin \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}. \end{aligned} \tag{21}$$

$$\left(a_n \cos \frac{\pi nct}{L} + b_n \sin \frac{\pi nct}{L} \right) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin \left(\frac{n\pi ct}{L} + \tan^{-1} \frac{a_n}{b_n} \right),$$

se llaman ***modos normales*** **de vibración** con **frecuencias** $\omega_n = n\pi c/L$.

El **sonido** es la superposición de este número infinito de de **frecuencias naturales**.

El modo normal $n = 1$ se denomina el **primer armónico principal** o **armónico fundamental**.

Éste tiene una **frecuencia angular** $\omega_1 = \pi c/L$ o $f_1 = c/(2L)$ ciclos por segundo.

Frecuencias naturales más altas significa tonos de sonido más altos. Podemos producir una frecuencia determinada cambiando $c = \sqrt{T/\rho}$, que puede hacerse variando la **tensión de la cuerda**.

También podemos cambiar la frecuencia cambiando la **longitud de la cuerda**: cuerdas más cortas implican tonos altos.

Para una cuerda vibrante con extremos fijos, el n-ésimo armónico tiene una frecuencia n veces más alta que la frecuencia fundamental.

Nótese que el armónico n-ésimo tiene $(n-1)$ ceros en el intervalo $(0, L)$ que se llaman ***nodos***.

En cada instante de tiempo, cada modo se parece a una oscilación simple en la variable x. La amplitud en x varía periódicamente en el tiempo manteniendo el perfil espacial. Esto se denomina una ***onda estacionaria***.

Cada onda estacionaria está compuesta por dos **ondas viajeras**; considérese por ejemplo el término

$$\sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} = \frac{1}{2} \cos \frac{n\pi(x - ct)}{L} - \frac{1}{2} \cos \frac{n\pi(x + ct)}{L}.$$

Aquí el primer término del lado derecho es una onda viajera hacia la derecha con velocidad c, mientras que el segundo término es una onda viajera hacia la izquierda con la misma velocidad.

Se puede analizar de forma sencilla la ecuación de onda con condiciones de frontera de tipo Neumann o Robin a lo largo de las mismas líneas.

2. Ecuación de onda no homogénea

Consideremos el problema PVICC no homogéneo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= Q(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, && (22)\\
u(x,0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), \quad 0 < x < L, && (23)\\
u(0,t) &= T_0(t), \quad t > 0, && (24)\\
u(L,t) &= T_1(t), \quad t > 0. && (25)
\end{aligned}$$

Expandimos la solución en **serie de Fourier de senos** (apropiada para condiciones de contorno de tipo Dirichlet) como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{26}$$

donde ahora no conocemos su dependencia en el tiempo.

Nótese que la **ortogonalidad** de las funciones seno da la fórmula

$$b_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \tag{27}$$

para los **coeficientes de Fourier** de la solución.

Ahora multiplicamos la ecuación (26) por $(2/L)\sin(n\pi x/L)$ e integramos el resultado entre 0 y L, obteniendo por tanto

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} - \frac{2c^2}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\bigg|_0^L + \frac{2n\pi c^2}{L^2}\cos\frac{n\pi x}{L}u(x,t)\bigg|_0^L + \frac{2n^2\pi^2c^2}{L^3}\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$
$$= \frac{2}{L}\int_0^L Q(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,$$

después de integrar dos veces por partes.

Usando las condiciones de contorno (24) y (25) y la fórmula (27) en esta ecuación, hallamos la EDO:

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}b_n = \frac{2n\pi}{L^2}[T_0(t) - (-1)^nT_1(t)] + \frac{2}{L}\int_0^L Q(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \equiv f_n(t). \tag{28}$$

Esta es una **EDO de segundo orden lineal** que se debe resolver con las condiciones iniciales

$$b_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \tag{29}$$

$$\frac{db_n(0)}{dt} = \frac{2}{n\pi}\int_0^L v_0(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{30}$$

La solución de este PVI es

$$b_n(t) = b_n(0)\cos\frac{n\pi ct}{L} + \frac{L\dot{b}_n(0)}{n\pi c}\sin\frac{n\pi ct}{L} + \frac{L}{n\pi c}\int_0^t f_n(s)\sin\frac{n\pi c(t-s)}{L}ds. \tag{31}$$

Las ecuaciones (26) y (31) son la solución del PVICC dado por (22)-(25), [1].

B. Resonancia

Consideremos una ecuación de onda no homogénea con un término de fuente (o condiciones de frontera no homogéneas) proporcionales a $\cos\omega t$, $f_n(t) = f_n\cos\omega t$.

Entonces (31) da lugar a

$$b_n(t) = b_n(0)\cos\frac{n\pi ct}{L} + \frac{L\dot{b}_n(0)}{n\pi c}\sin\frac{n\pi ct}{L} + \frac{L}{2n\pi c}\left(\frac{1}{\omega - \frac{n\pi c}{L}} - \frac{1}{\omega + \frac{n\pi c}{L}}\right)\left(\cos\frac{n\pi ct}{L} - \cos\omega t\right) \tag{32}$$

Si la frecuencia de forzado se aproxima a la del nodo n-ésimo, esta ecuación se convierte en

$$b_n(t) = b_n(0)\cos\frac{n\pi ct}{L} + \frac{L\dot{b}_n(0)}{n\pi c}\sin\frac{n\pi ct}{L} + \frac{L}{2n\pi c}\frac{t}{2}\sin\frac{n\pi ct}{L}. \tag{33}$$

La amplitud del último término en (33) crece linealmente con t, de modo que la **amplitud** del n-ésimo modo crece mientras que el resto de modos permanecen acotados.
Pasado un tiempo, los **modos resonantes** dominarán. Por lo tanto la estructura espacial de una solución se deberá principalmente a las autofunciones de los modos resonantes. Los otros modos no se excitan significativamente.

II. MATERIAL SUPLEMENTARIO: SOLUCIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE LA ECUACIÓN DE ONDA

Consideremos el problema de Dirichlet para la ecuación de onda homogénea

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \qquad (34)\\
u(x,0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), \quad 0 < x < L,\\
u(0,t) &= 0, \quad t > 0,\\
u(l,t) &= 0, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

A. Esquema explícito

El **esquema numérico** más sencillo consiste en usar **diferencias centradas** en las variables espacial y temporal:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_j) = \frac{u(x_j,t_j+\Delta t) + u(x_j,t_j-\Delta t) - 2u(x_j,t_j)}{(\Delta t)^2} - \frac{(\Delta t)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j,\tilde{t}_j), \tag{35}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_j) = \frac{u(x_j+\Delta x,t_j) + u(x_j-\Delta x,t_j) - 2u(x_j,t_j)}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{x}_j,t_j), \tag{36}$$

donde $t_j < \tilde{t}_j < t_j + \Delta t$, $x_j < \tilde{x}_j < x_j + \Delta x$, y hemos discretizado el tiempo y el espacio considerando:
$0 = t_0 < t_1 = t_0 + \Delta t < \ldots < t_M = t_0 + M\Delta t = T$, y
$0 = x_0 < x_1 = x_0 + \Delta x < \ldots < x_N = x_0 + N\Delta x = L$.
Ahora sustituimos (35) y (36) dentro de (34), quitamos los términos de error y usamos la

notación

$$u(x_j, t_m) = U_j^m \tag{37}$$

(indicando la elongación en los puntos de la malla x_j en el instante de tiempo t_m), en el resultado.

Obtenemos el siguiente **esquema en diferencias**:

$$\begin{aligned}
U_j^{m+1} - 2U_j^m + U_j^{m-1} &= \mu^2(U_{j+1}^m + U_{j-1}^m - 2U_j^m), && (38)\\
U_j^0 &= u_0(x_j) \equiv u_{0j}\,(j = 1, \ldots, N-1), && (39)\\
\frac{U_j^1 - U_j^{-1}}{2\Delta t} &= v_0(x_j) \equiv v_{0j} && (40)\\
U_0^m &= 0, \quad U_N^m = 0\,(m = 1, \ldots, M-1), && (41)
\end{aligned}$$

en el que μ es el **cociente adimensional** entre la **velocidad de la onda** y la **velocidad numérica**:

$$\mu = \frac{c}{(\Delta x/\Delta t)}. \tag{42}$$

Nótese que hemos usado una diferencia centrada en el tiempo para $\partial u/\partial t(x, 0)$ en (40) para mantener un error de truncamiento de orden $O((\Delta t)^2)$.

Ahora, tenemos que hallar U_j^{-1}. Usaremos las condiciones iniciales, (39) y (40) y la ecuación parcial en diferencias para $m = 0$:

$$U_j^1 = 2U_j^0 - U_j^{-1} + \mu^2(U_{j+1}^0 + U_{j-1}^0 - 2U_j^0). \tag{43}$$

Se puede obtener U_j^{-1} eliminando U_j^1 a partir de (40) y (43).

Una vez que U_j^{-1} y U_j^0 son conocidas, los posteriores valores de u se pueden computar usando la ecuación (38).

B. Análisis de estabilidad

Para determinar la estabilidad del esquema discreto (38), sustituimos

$$U_j^m = e^{i\alpha x} R^{t/\Delta t} = e^{i\alpha j\Delta x} R^m, \tag{44}$$

en dicho esquema.

Cancelando $e^{i\alpha x} R^m$, obtenemos

$$R + \frac{1}{R} - 2 = 2\mu^2[\cos(\alpha\Delta x) - 1] = -4\mu^2 \sin^2 \frac{\alpha\Delta x}{2}. \tag{45}$$

Esto es lo mismo que

$$R^2 - 2\left(1 - 2\mu^2 \sin^2 \frac{\alpha \Delta x}{2}\right) R + 1 = 0, \tag{46}$$

cuyas solucione son

$$R = 1 - 2\mu^2 \sin^2 \frac{\alpha \Delta x}{2} \pm 2\mu \sin \frac{\alpha \Delta x}{2} \sqrt{\mu^2 \sin^2 \frac{\alpha \Delta x}{2} - 1}. \tag{47}$$

Hay **dos posibilidades**:

Si $\mu^2 \sin^2 \frac{\alpha \Delta x}{2} > 1$, las dos raíces son reales y una de ellas tiene $|R| > 1$ y la otra $|R| < 1$ para que su producto sea igual a 1. En este caso, el esquema numérico es **inestable**.

Por otro lado, si $\mu^2 \sin^2 \frac{\alpha \Delta x}{2} < 1$, las dos raíces (47) son complejas conjugadas y sus módulos son iguales a 1 porque su producto vale 1 de acuerdo con (46). En este caso, la solución del esquema discreto oscila para $x_j = j\Delta x$ fija cuando el tiempo $t_m = m\Delta t$ aumenta, esto es similar a las vibraciones de una cuerda con extremos fijos descrita por la ecuación de onda.

Por tanto, **el esquema es *stable* si** $\mu^2 \leq 1$, es decir,

$$\frac{c}{(\Delta x / \Delta t)} \leq 1, \quad c \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{48}$$

(48) es la ***condición de estabilidad de Courant*** (también llamada **condición de Courant-Friedrichs-Lewy** o **condición CFL**) para la ecuación de onda: **el esquema explícito basado en diferencias centradas es estable si la velocidad de la onda se mantiene por debajo de la velocidad numérica $\Delta x / \Delta t$.**

Se puede demostrar que el error del esquema para x y t fijos es de orden $O(\Delta t)$. Dado que es frecuente hacer los cálculos con $\Delta x / \Delta t$ fijos, para reducir a la mitad el error, debemos disminuir Δx y Δt un factor 2 sin cambiar la velocidad numérica.

[1] R. Haberman, Elementary applied partial differential equations. 3rd ed. Prentice Hall, 1998. Chapters 4, 6, 8 and 12.

[2] J. B. Keller, “Ponytail motion”. SIAM J. Appl. Math. **70**, 2667-2672 (2010).

[3] R. E. Goldstein, P.B. Warren and R.C. Ball, “Shape of a Ponytail and the Statistical Physics of Hair Fiber Bundles”. Phys. Rev. Lett. **108**, 078101 (2012