Cálculo Diferencial Aplicado

TEMA 7:

Series de Fourier y separación de variables: Ecuación de Laplace.

Autores:

Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin, Rocío Vega

Departamento de Ciencia e Ingeniería de Materiales e Ingeniería Química,

Universidad Carlos III de Madrid,

Grado en Ingeniería Informática y

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas.

I. ECUACIÓN DE LAPLACE

A. Ecuación de Laplace 2D

1. *Ecuación de Laplace en una región rectangular*

Consideremos la conducción de calor en una hoja de metal rectangular 2D, $\mathcal{R} = [0, L] \times [0, M]$, sin fuentes de calor y con temperatura fija en las fronteras.

Cuando $t \to \infty$, la distribución de temperatura es independiente del tiempo y, por lo tanto, es una solución de la **ecuación de Laplace homogénea** con condiciones de frontera de tipo **Dirichlet no homogéneas**:

$$\nabla^2 u = 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = F_1(x), \quad u(x, M) = F_2(x), \quad u(0, y) = G_1(y), \quad u(L, y) = G_2(y). \tag{2}$$

Es fácil resolver este problema con valores en la frontera (PVF) usando el **principio de superposición** y la **separación de variables**.

Dividamos la solución de este problema en cuatro PVFs:

$$u(x, y) = U_1(x, y) + U_2(x, y) + U_3(x, y) + U_4(x, y), \tag{3}$$

donde las funciones U_j, $j = 1, 2, 3, 4$, resuelven (1) aplicando las condiciones de frontera:

$$U_1(x, 0) = F_1(x), \quad U_1(x, M) = 0, \quad U_1(0, y) = 0, \quad U_1(L, y) = 0; \tag{4}$$

$$U_2(x, 0) = 0, \quad U_2(x, M) = F_2(x), \quad U_2(0, y) = 0, \quad U_2(L, y) = 0; \tag{5}$$

$$U_3(x, 0) = 0, \quad U_3(x, M) = 0, \quad U_3(0, y) = G_1(y), \quad U_3(L, y) = 0; \tag{6}$$

$$U_4(x, 0) = 0, \quad U_4(x, M) = 0, \quad U_4(0, y) = 0, \quad U_4(L, y) = G_2(y). \tag{7}$$

Todos estos PVFs se resuelven de la misma manera.

Aplicando **separación de variables**, $U_j = X(x)Y(y)$, se tiene

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \tag{8}$$

donde λ es la **constante de separación**.

Entonces el problema de Dirichlet (4) da lugar al **problema de autovalores** habitual para el **Laplaciano**:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L, \tag{9}$$

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Para cada uno de estos autovalores, la solución general de la EDO para la incógnita Y en (8) es

$$Y_n(y) = a_n e^{\pi n y/L} + b_n e^{-\pi n y/L}. \tag{11}$$

Usando la condición de frontera $u_1(x, H) = 0$, encontramos que $Y_n(M) = 0$, por tanto

$$a_n e^{n\pi M/L} + b_n e^{-n\pi M/L} = 0.$$

Entonces tenemos

$$Y_n(y) = c_n \sinh\frac{\pi n(y - M)}{L}, \tag{12}$$

donde $a_n = \frac{1}{2}c_n e^{-n\pi M/L}$, $b_n = -\frac{1}{2}c_n e^{n\pi M/L}$.

El **principio de superposición** da entonces la **serie de Fourier de senos**

$$U_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\frac{\pi n(y - H)}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{13}$$

con coeficientes constantes c_n que se calculan de modo que

$$F_1(x) = U_1(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\frac{\pi n(-M)}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\frac{\pi n M}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{14}$$

Entonces, usando la **propiedad de ortogonalidad** de la serie de Fourier de senos, encontramos que

$$c_n = -\frac{2}{L\sinh(n\pi M/L)}\int_0^L F_1(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \tag{15}$$

y por lo tanto

$$U_1(x, y) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^L F_1(s)\sin\frac{n\pi s}{L}ds}{\sinh(n\pi M/L)}\sinh\frac{\pi n(M - y)}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{16}$$

Las otras partes de la solución se calculan de modo similar, produciendo los siguientes resultados:

$$U_2(x, y) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^L F_2(s)\sin\frac{n\pi s}{L}ds}{\sinh(n\pi M/L)}\sinh\frac{\pi n y}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{17}$$

$$U_3(x, y) = \frac{2}{M}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^M G_1(s)\sin\frac{n\pi s}{M}ds}{\sinh(n\pi L/M)}\sinh\frac{\pi n(L - x)}{M}\sin\frac{n\pi y}{M}, \tag{18}$$

$$U_4(x, y) = \frac{2}{M}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^M G_2(s)\sin\frac{n\pi s}{M}ds}{\sinh(n\pi L/M)}\sinh\frac{\pi n x}{M}\sin\frac{n\pi y}{M}. \tag{19}$$

*2. **Ecuación de Laplace en un disco circular***

Consideremos ahora la ecuación de Laplace en un disco circular con temperatura conocida en la frontera $r = a$:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \tag{20}$$

$$u(a,\theta) = f(\theta), \quad -\pi \le \theta \le \pi. \tag{21}$$

Aplicando **separación de variables** en la forma:

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta), \tag{22}$$

da las siguientes ecuaciones cuando se insertan en (20):

$$\Theta(\theta)\left(R''(r) + \frac{R'(r)}{r}\right) + \frac{R(r)}{r^2}\Theta''(\theta) = 0 \Longrightarrow \frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda, \tag{23}$$

donde λ es la **constante de separación**.

Por tanto, encontramos el **problema de autovalores**

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \tag{24}$$

$$\Theta(-\pi) = \Theta(\pi), \quad \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi). \tag{25}$$

Las soluciones de este problema son

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{26}$$

$$\Theta_n^{(1)}(\theta) = \cos n\theta, \quad \Theta_n^{(2)}(\theta) = \sin n\theta, \tag{27}$$

La **parte radial** $R_n(r)$ satisface la ecuación:

$$r^2\frac{d^2 R_n}{dr^2} + r\frac{dR_n}{dr} - n^2 R_n = 0. \tag{28}$$

Esta es una **ecuación de Euler** que debe resolverse asumiendo que $R_n = r^q$, por tanto $q(q-1) + q - n^2 = 0$, que da $q^2 = n^2$ para $n \neq 0$, obteniendo $q = \pm n$.

Entonces $R_n = a_n r^n + b_n r^{-n}$.

Para $n = 0$, $0 = rR_0'' + R_0' = (rR_0')'$.

Esto da $rR_0' = b_0 \Longrightarrow R_0(r) = b_0 \int dr/r = b_0 \ln r + a_0$.

Hemos encontrado que

$$R_n(r) = \begin{cases} a_n r^n + b_n r^{-n}, & n \neq 0, \\ a_0 + b_0 \ln r, & n = 0. \end{cases} \tag{29}$$

En el **centro del disco**, la temperatura debe ser finita, por tanto la condición $|R_n(0)| < \infty$ implica que $b_n = 0$.

Entonces el **principio de superposición** da lugar a

$$u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{30}$$

La condición de frontera (21) da

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta, \quad \text{for } n \neq 0 \text{ and} \tag{31}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta, \tag{32}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta. \tag{33}$$

Entonces (30)-(33) produce

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta')d\theta' + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos n\theta'\cos n\theta + \sin n\theta'\sin n\theta)d\theta' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta')d\theta' + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta')\cos[n(\theta-\theta')]d\theta'. \end{aligned} \tag{34}$$

Nótese que $(r/a)^n\cos[n(\theta-\theta')]$ es la parte real de $(re^{i(\theta-\theta')}/a)^n$ y que podemos sumar **la progresión geométrica**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}e^{i(\theta-\theta')}\right)^n = \frac{1}{1-re^{i(\theta-\theta')}/a} - 1.$$

Entonces (34) se puede escribir como

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta')\left[-\frac{1}{2} + \operatorname{Re}\frac{1}{1-re^{i(\theta-\theta')}/a}\right]d\theta' \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta')\left[-\frac{1}{2} + \frac{1-\frac{r}{a}\cos(\theta-\theta')}{(1-\frac{r}{a}\cos(\theta-\theta'))^2 + \frac{r^2}{a^2}\sin^2(\theta-\theta')}\right]d\theta' \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta')\left[-\frac{1}{2} + \frac{1-\frac{r}{a}\cos(\theta-\theta')}{1-\frac{2r}{a}\cos(\theta-\theta')+\frac{r^2}{a^2}}\right]d\theta' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta')\frac{1-\frac{r^2}{a^2}}{1-\frac{2r}{a}\cos(\theta-\theta')+\frac{r^2}{a^2}}d\theta', \end{aligned}$$

es decir,

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(a^2-r^2)f(\theta')}{a^2-2ar\cos(\theta-\theta')+r^2}d\theta', \tag{35}$$

que es la ***fórmula de Poisson***.

3. ***Propiedades cualitativas de la ecuación de Laplace***

Como consecuencia de la fórmula de Poisson (35) o de (30) y (31), encontramos

$$u(0,\theta) = a_0 = \frac{1}{2\pi a}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta')ad\theta'. \tag{36}$$

La temperatura en el centro de un disco de radio a es igual a el valor medio de la temperatura en los bordes del disco.

Consideremos ahora una región $\mathcal{R}$, un punto interior p y un círculo de radio a y centro p totalmente contenido en $\mathcal{R}$. El análisis anterior es aplicable y por tanto ***la solución de la ecuación de Laplace en*** $p \in \mathcal{R}$ ***es igual a la media de la solución a lo largo de cualquier círculo de radio*** a ***contenido en*** $\mathcal{R}$ ***centrado en ese punto.***

Este es el **teorema del valor medio para la ecuación de Laplace**.

Podemos usar el teorema del valor medio para probar que **la solución de la ecuación de Laplace dentro de una región finita $\mathcal{R}$ alcanza sus valores máximo y mínimo en la frontera de $\mathcal{R}$ salvo que la solución sea constante en todas partes**.

Estos son los llamados ***principios del máximo*** **y del mínimo para la ecuación de Laplace**.

Podemos hacer la **demostración** de estos principios usando la técnica de **reducción al absurdo**.

Supongamos que el máximo valor se obtiene en un punto interior $\tilde{p}$. Debido al teorema del valor medio, este valor es la media de la solución a lo largo del borde de cualquier círculo interior centrado en $\tilde{p}$. Pero esto no es posible salvo que la solución sea constante.

Supongamos ahora que variamos los datos del PVF.

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{con } u = f(\underline{x}) \text{ para } \underline{x} \in \partial\mathcal{R}, \tag{37}$$

de la función f a una función **cercana** g:

$$\nabla^2 v = 0 \quad \text{con } v = g(\underline{x}) \text{ para } \underline{x} \in \partial\mathcal{R}. \tag{38}$$

Consideremos ahora $\omega = u - v$, por tanto

$$\nabla^2 \omega = 0 \quad \text{con } \omega(\underline{x}) = f(\underline{x}) - g(\underline{x}) \text{ para } \underline{x} \in \partial\mathcal{R}. \tag{39}$$

De acuerdo con los principios del máximo y el mínimo, tenemos

$$\min[f(\underline{x}) - g(\underline{x})] \leq \omega(\underline{x}) \leq \max[f(\underline{x}) - g(\underline{x})]. \tag{40}$$

Por tanto, si la diferencia entre f y g en la frontera $\partial\mathcal{R}$ es en todas partes pequeña, también lo es la diferencia entre las soluciones de los correspondientes PVFs.

Que la **solución de la ecuación de Laplace** es **única** se deduce a partir de (40):

Si u y v son dos soluciones distintas con los mismos valores en la frontera, $f = g$, (40) da lugar a $0 \leq \omega \leq 0$ en todos los puntos de $\mathcal{R}$.

Por tanto, si la solución de la ecuación de Laplace existe, es única y depende continuamente de la solución especificada en la frontera. Decimos entonces que la ecuación de Laplace con u especificada en la frontera es un ***problema bien planteado***.

B. Material suplementario: Ecuación de Poisson

Consideremos la ecuación de Poisson en un rectángulo $\Omega = (0.L) \times (0, M)$ con condiciones de contorno no homogéneas:

$$\nabla^2 u = Q(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega, \tag{41}$$

$$u = \alpha(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \partial\Omega. \tag{42}$$

Asumimos que los términos de fuente $Q(\underline{x})$ y $\alpha(\underline{x})$ son funciones continuas con derivadas primeras continuas en Ω y $\partial\Omega$, respectivamente.

1. *Solución mediante expansiones en autofunciones 2D*

Usaremos las autofunciones del operador Laplaciano:

$$\nabla^2 \phi_i = -\lambda_i \phi_i, \quad \underline{x} \in \Omega, \tag{43}$$

$$\phi_i(\underline{x}) = 0, \quad \underline{x} \in \partial\Omega. \tag{44}$$

Estas autofunciones para el rectángulo $\Omega = (0, L) \times (0, M)$ son

$$\phi_i(\underline{x}) = \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{M}, \tag{45}$$

$$n, m = 1, 2, \ldots, \quad i = (n, m), \quad \lambda_i = \pi^2\left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{M^2}\right). \tag{46}$$

Ahora multiplicamos (41) por ϕ_i e integramos sobre Ω.

El resultado es

$$\int \phi_i Q = \int \phi_i \nabla^2 u = \int [u\nabla^2\phi_i + \nabla\cdot(\phi_i\nabla u - u\nabla\phi_i)] = -\lambda_i \int u\phi_i - \oint u\underline{n}\cdot\nabla\phi_i,$$

en el que $\underline{n}$ es la normal unitaria exterior al rectángulo y hemos usado la identidad $v\nabla^2 u - u\nabla^2 v = \nabla \cdot (v\nabla u - u\nabla v)$, (43) y (44).

Usando ahora (42), obtenemos

$$\int u\phi_i = -\frac{\int \phi_i Q + \oint \alpha \underline{n} \cdot \nabla \phi_i}{\lambda_i}. \tag{47}$$

Si expandimos la solución de (41)-(42) como $u(\underline{x}) = \sum_i u_i \phi_i(\underline{x})$, los coeficientes u_i son

$$u_i = \frac{\int u\phi_i}{\int \phi_i^2} = -\frac{\int \phi_i Q + \oint \alpha \underline{n} \cdot \nabla \phi_i}{\lambda_i \int \phi_i^2}. \tag{48}$$

En el caso del rectángulo con condiciones de frontera,

$$u(x,y) = \begin{cases} F_1(x), & y = 0, \quad 0 < x < L, \;\; \underline{n} = -(0,1), \\ F_2(x), & y = M, \;\; 0 < x < L, \quad \underline{n} = (0,1), \\ G_1(y), & x = 0, \quad 0 < y < M, \;\; \underline{n} = -(1,0), \\ G_2(y), & x = L, \;\; 0 < y < M, \quad \underline{n} = (1,0), \end{cases} \tag{49}$$

esta fórmula general se convierte en

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{M}, \tag{50}$$

$$\begin{aligned} u_{n,m} &= -\frac{4LM}{\pi^2(n^2M^2 + m^2L^2)} \int_0^L \int_0^M Q(x', y') \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{M} dx dy \\ &+ \frac{4mL}{\pi(n^2M^2 + m^2L^2)} \int_0^L [F_1(x) - (-1)^m F_2(x)] \sin\frac{n\pi x}{L} dx \\ &+ \frac{4nM}{\pi(n^2M^2 + m^2L^2)} \int_0^M [G_1(y) - (-1)^n G_2(y)] \sin\frac{m\pi y}{M} dy \\ &= -\frac{Q_{nm}}{\pi^2\left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{M^2}\right)} + \frac{\frac{2m}{M^2}[F_{1,n} - (-1)^m F_{2,n}] + \frac{2n}{L^2}[G_{1,m} - (-1)^n G_{2,m}]}{\pi\left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{M^2}\right)}. \end{aligned} \tag{51}$$

Nótese que la normal exterior determina el signo de la correspondiente contribución a $\oint \alpha \underline{n} \cdot \nabla \phi_i$ como se escribió en (51). La última fórmula es válida asumiendo que el término de fuente $Q(x,y)$ es continuo y que los términos de la frontera tienen derivadas primeras continuas y son nulos en los puntos de intersección $x = 0$, $x = L$, $y = 0$ y $y = M$ (de modo que las extensiones periódicas impares de $F_i(x)$ y $G_i(y)$, con $i = 1, 2$, son continuas en las esquinas del rectángulo).

2. ***Solución mediante autofunciones 1D***

Resolvamos la ecuación de Poisson con condiciones de frontera de tipo Dirichlet homogéneas en un rectángulo mediante un método diferente.

Usaremos la **expansión en autofunciones 1D**

$$u(x,y) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} B_n(y) \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{52}$$

donde los coeficientes del seno $B_n(y)$ son funciones de y. Derivando (52) respecto a y y sustituyendo en la **ecuación de Poisson**, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 B_n}{dy^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2} b_n \right) \sin \frac{n\pi x}{L} = Q. \tag{53}$$

Hemos derivado término a término porque las condiciones de frontera son homogéneas. Por tanto los coeficientes del seno satisfacen la EDO no homogénea:

$$\frac{d^2 B_n}{dy^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2} B_n = \frac{2}{L} \int_0^L Q(x,y) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \equiv Q_n(y). \tag{54}$$

Las condiciones de frontera homogéneas de tipo Dirichlet para u dan lugar a las siguientes condiciones de frontera para $B_n(y)$: $B_n(0) = 0$ y $B_n(M) = 0$. La solución de este PVF es

$$\begin{aligned} B_n(y) = -\frac{L}{n\pi \sinh \frac{n\pi M}{L}} \Bigg[&\sinh \frac{n\pi (M-y)}{L} \int_0^y Q_n(\eta) \sinh \frac{n\pi \eta}{L} d\eta \\ &+ \sinh \frac{n\pi y}{L} \int_y^M Q_n(y) \sinh \frac{n\pi (M-\eta)}{L} d\eta \Bigg]. \end{aligned} \tag{55}$$

[1] R. Haberman, Elementary applied partial differential equations. 3rd ed. Prentice Hall, 1998.