

Cálculo Diferencial Aplicado

Tema 1: Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Autores:

Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin,
Rocío Vega

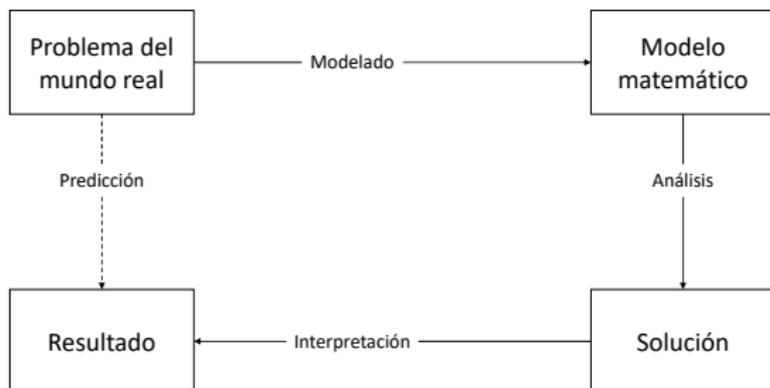
Grado en Ingeniería Informática y
Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas.



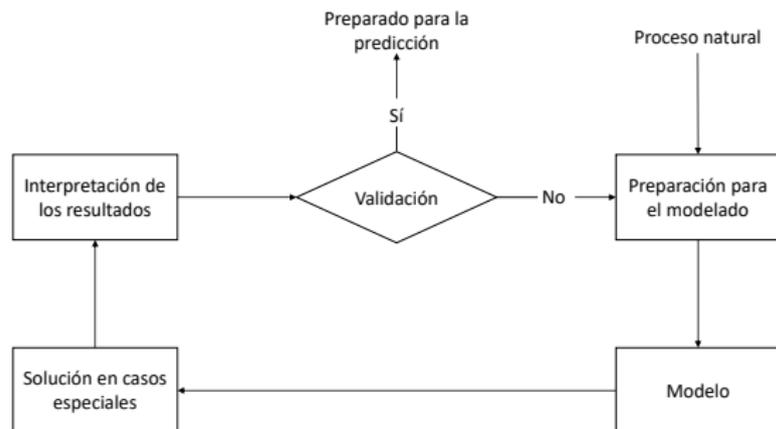
Descripción de contenidos del tema

- Modelado.
- Conceptos generales. Existencia y unicidad. Campo de direcciones para una EDO de primer orden.
- Soluciones exactas para EDOs de primer orden especiales.
- Soluciones numéricas: métodos de Euler, Heun y Runge-Kutta.
- Comportamiento de las soluciones a tiempos largos. Análisis cualitativo de las soluciones.

Resolución de problemas mediante modelado matemático



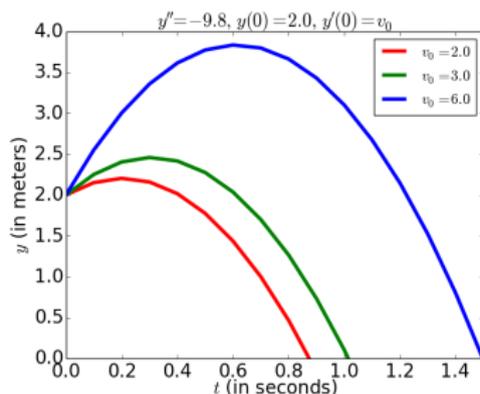
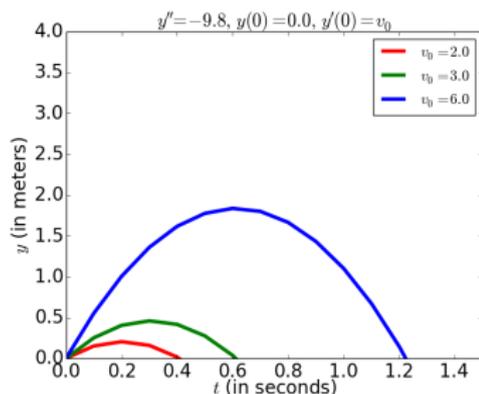
Resolución de problemas mediante modelado matemático



Modelo de Galileo

$$y'' = -g, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = v_0.$$

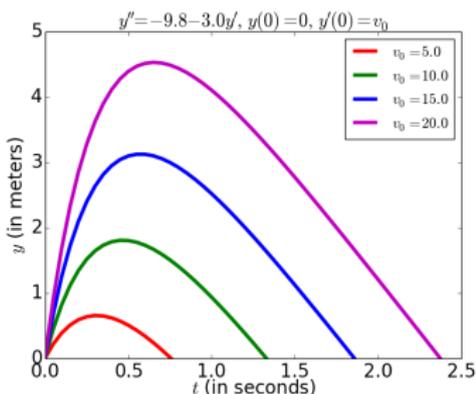
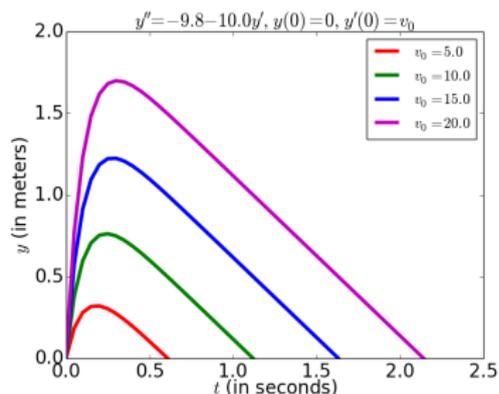


(a) $y_0 = 0, v_0 = 2, 4, 6$. (b) $y_0 = 2, v_0 = 2, 4, 6$.

Modelo de Newton

$$m y'' = -mg - cy', \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = v_0.$$

(a) $c/m = 3$;(b) $c/m = 10$.

Modelado de una población de peces (1)

y' = (tasa de natalidad) – [(tasa de mortalidad) + (tasa de captura)],

medido en toneladas por año.

El modelo más simple: las tasas de natalidad y mortalidad son proporcionales a $y(t)$.

$a = b - d > 0$ es la tasa de crecimiento:

$$y' = ay - H, \quad y(t_0) = y_0.$$

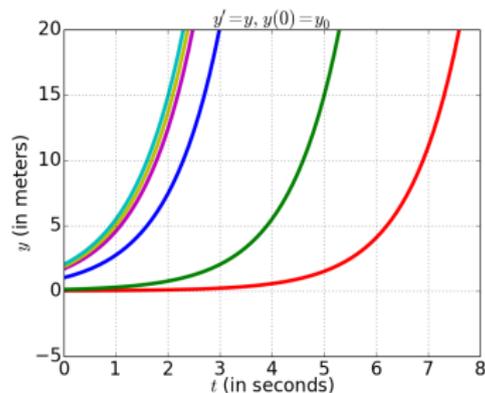
Solución usando un factor integrante:

$$-e^{\mu(t)} H = e^{\mu(t)} (y' - ay) = \frac{d}{dt} \left(e^{\mu(t)} y \right) = e^{\mu(t)} (y' + \mu' y) \implies \mu' = -a.$$

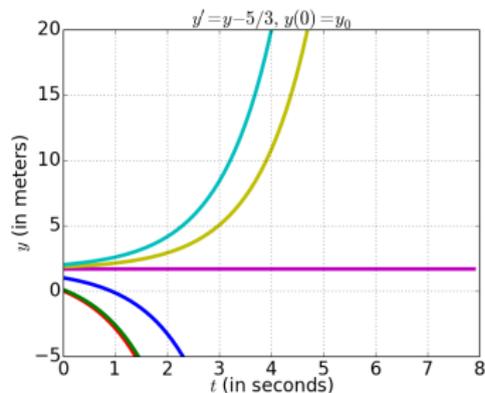
Entonces $\mu = -at$ y obtenemos $e^{-at} y = c + \frac{H}{a} e^{-at}$ o $y(t) = \frac{H}{a} + ce^{at}$.

$$y(t) = \frac{H}{a} + \left(y_0 - \frac{H}{a} \right) e^{a(t-t_0)}.$$

Modelado de una población de peces (2)



(a)



(b)

Crecimiento exponencial de la población cuando no hay captura: PVI con $a = 1$, $H = 0$ en (a) y $H = 5/3$ en (b), para varios valores de y_0 .

$$y(t) = \frac{H}{a} + \left(y_0 - \frac{H}{a} \right) e^{at} \quad (t_0 = 0).$$

Población de peces con crecimiento logístico

Limitación del crecimiento debido a superpoblación

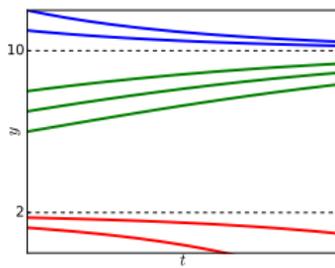
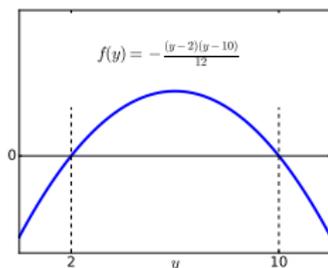
$$y' = ay - cy^2 - H, \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0.$$

La fórmula de la solución es complicada. La hallaremos más adelante mediante **separación de variables**.

Comportamiento cualitativo de las curvas solución. Resolvemos un ejemplo: $a = 1$, $c = \frac{1}{12}$, $H = \frac{5}{3}$, por tanto

$$y' = -\frac{1}{12}(y - 10)(y - 2) := f(y), \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0.$$

$f(y) = 0$ para $y = 10$, $y = 2$. Estas son las **soluciones de equilibrio**.



Separación de variables

Separación of variables:

$$y' = -\frac{1}{12}(y-10)(y-2) \implies -\frac{dt}{12} = \frac{dy}{(y-10)(y-2)}.$$

$$-\frac{t}{12} + C = \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{y-10} - \frac{1}{y-2} \right) dy = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{y-10}{y-2} \right|.$$

$$\frac{10-y}{y-2} = Ke^{-2t/3} \implies y(t) = \frac{10 + 2Ke^{-2t/3}}{1 + Ke^{-2t/3}},$$

con $K = \frac{10-y_0}{y_0-2} e^{2t_0/3}$ supuesto $2 < y_0 < 10$.

Cuando t crece desde $-\infty$ hasta $+\infty$, las curvas solución van desde 2 hasta 10.

Teorema

Teorema de existencia y unicidad :

Si f y $\partial f/\partial y$ son funciones continuas en un rectángulo R y (t_0, y_0) está dentro de R , el PVI:

$$\begin{aligned}y' &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0,\end{aligned}$$

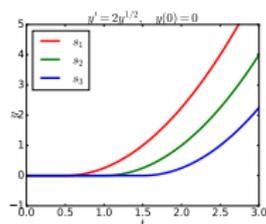
tiene una **solución única** para $|t - t_0| < \delta$ (para algún $\delta > 0$ que deja t en el rectángulo R). El PVI tiene una solución (**existencia**) y solamente una en R en cualquier intervalo de tiempo t que contenga a t_0 (**unicidad**).

¿Qué pasa si las condiciones del teorema no se cumplen?

$$y' = 2y^{1/2}, \quad y(t_0) = y_0.$$

$f(y) = 2y^{1/2}$ es continua para toda $y \geq 0$ pero $f'(y) = y^{-1/2}$ no es continua en $y = 0$. Una de las condiciones del del teorema no se cumple en rectángulos que contengan puntos de la forma $(t_0, 0)$. Separación de variables da lugar a $t - t_0 = y^{1/2} - y_0^{1/2}$, es decir, $y = (y_0^{1/2} + t - t_0)^2$ con $y_0 > 0$. Esta solución es válida para $y_0 = 0$ pero existen infinitas soluciones del mismo PVI: $y = 0$ e:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < s \\ (t - s)^2, & t \geq s \geq t_0. \end{cases}$$



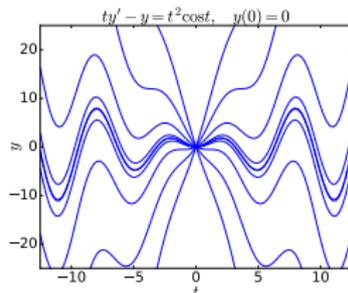
¿Qué pasa si las condiciones del teorema no se cumplen?

$$ty' - y = t^2 \cos t, \quad t > 0 \quad (f(t, y) = \frac{y}{t} + t \cos t, \text{ es no continua en } t = 0)$$

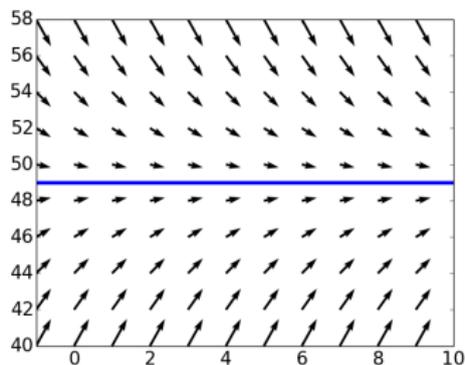
Multiplicando por $1/t^2$, obtenemos $(y/t)' = \cos t$, y por tanto

$$y = t \sin t + Ct, \quad t > 0.$$

Esta fórmula también da soluciones cuando $t \leq 0$ y todas estas soluciones satisfacen $y(0) = 0$. El PVI con: $y(0) = 0$ tiene **infinitas soluciones**, mientras que cualquier PVI con la condición inicial $y(0) = y_0 \neq 0$ **¡ no tiene ningún tipo de solución !**



Campo de direcciones



Campo de direcciones en el plano (x, y) de la EDO: $y' = 9.8 - 0.2y$ mostrando la **solución de equilibrio** $y^* = 9.8/0.2 = 49$.

Esta EDO describe cómo cae un cuerpo que pesa si su velocidad es $y(x)$ y su fuerza de fricción es ky , con $k = 0.2$ kg/s.

$y^* = 49$ m/s es la **velocidad límite**.

Campo de direcciones

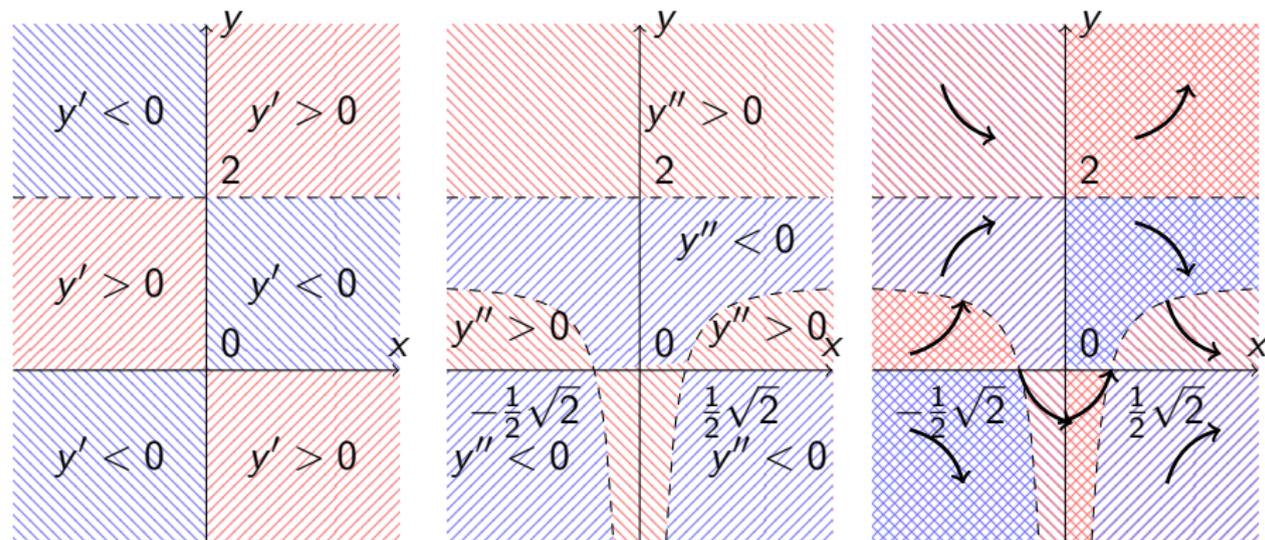


Figure: Sectores: (**izquierda**) decreciente y creciente $y(x)$, (**centro**) cóncava y convexa $y(x)$, (**derecha**) información combinada acerca de los signos de y' e y'' para la EDO $y' = xy(y - 2)$, con $y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = y(y - 2)(1 + 2x^2y - 2x^2)$.

Campo de direcciones y curvas solución

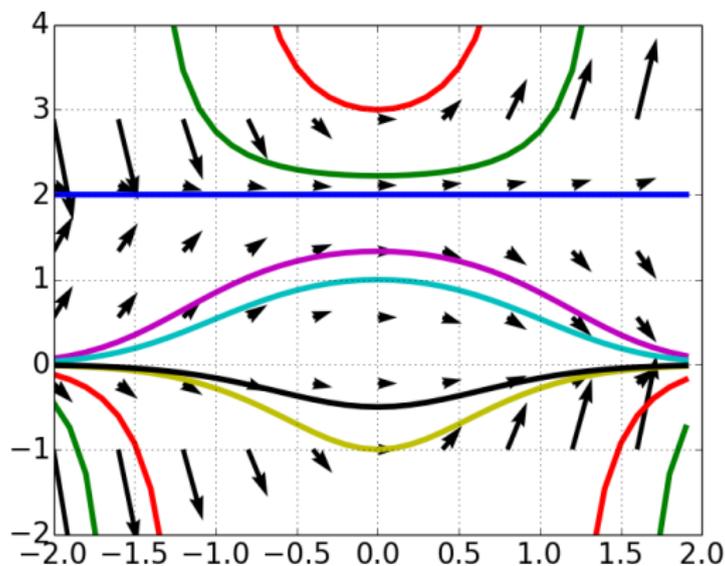


Figure: Campo de direcciones y trayectorias en el plano (x, y) de la EDO $y' = xy(y - 2)$.

Campo de direcciones y curvas solución

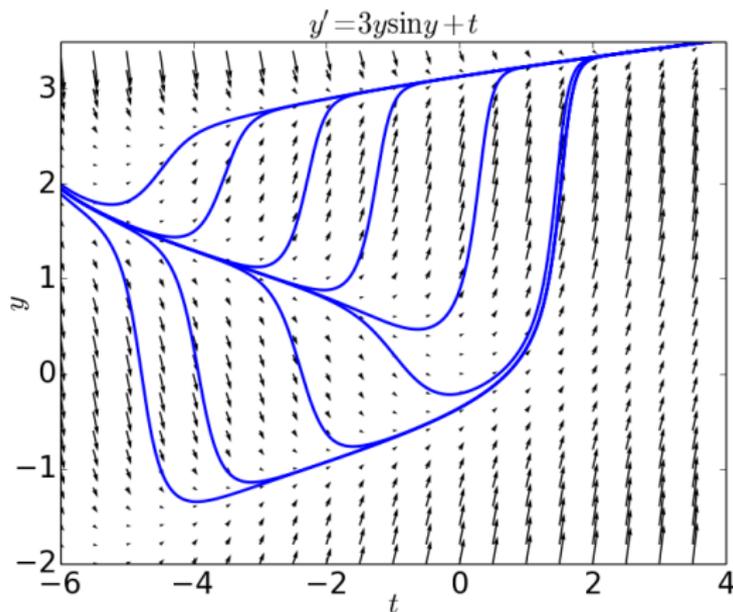


Figure: Las curvas solución se aproximan de forma arbitraria para valores grandes de $|t - t_0|$.

Campo de direcciones para un modelo con capturas periódicas

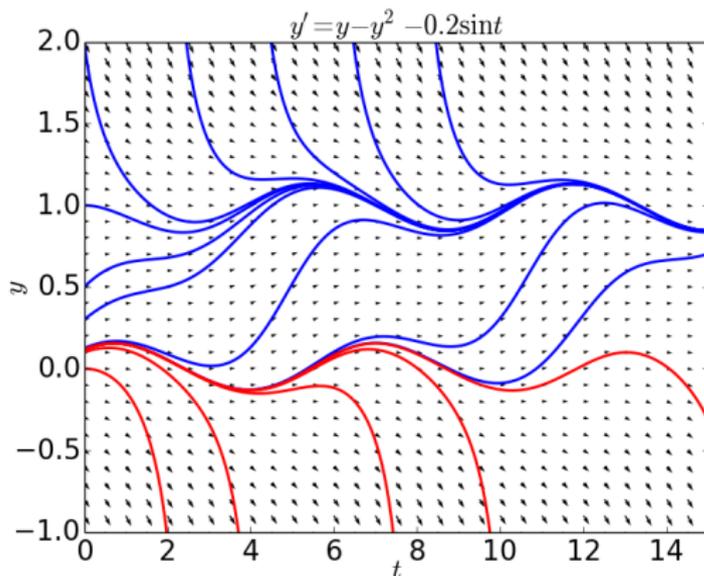


Figure: $y \sim 1 + 0.2 \cos t$ cuando $t \rightarrow +\infty$ para $y(0) > 0.1$,
 $y \rightarrow -\infty$ en cualquier otro caso.

Soluciones exactas

- **EDO Separable:**

$$M(x) + N(y)y' = 0 \implies \int M(x)dx = - \int N(y)dy + c.$$

- **EDO Exacta:** $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

- **EDO Lineal:** $y' + a(x)y = F(x)$. Usar factor integrante $I = e^{\int a(x)dx}$ para obtener la EDO trivial $(Iy)' = F(x)I(x)$. Entonces $y = e^{-\int a(x)dx} [\int F(x')e^{\int a(x')dx'} dx' + c]$.

- **EDO de Bernoulli:** $y' = a(x)y + b(x)y^P$. Usar $u = y^{1-P}$ para obtener una EDO lineal.

- **EDO de Riccati:** $y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$. Hallar solución particular, transformar en Bernoulli con $y = y_p(x) + u(x)$.

- **Substitutiones:** Para $y' = F(y/x)$, $u = y/x$ da $u' = [F(u) - u]/x$. $x = av + bw + c$, $y = dv + ew + f$, con apropiados valores de a, b, c, d, e, f , convierte $y' = (Ax + By + C)/(Dx + Ey + F)$ en una EDO separable para la función $w(v)$.

Método de Euler para la EDO $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$

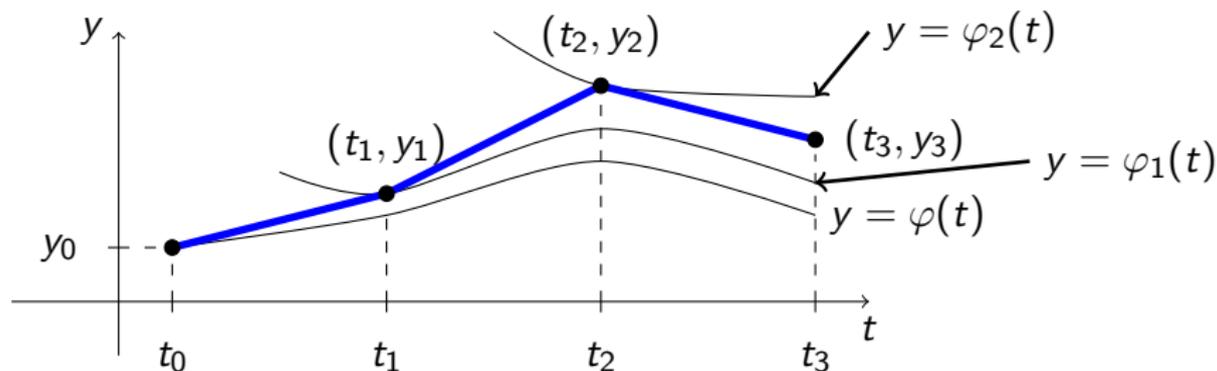


Figure: El **método de Euler explícito (forward)** $y_{j+1} = y_j + f(t_j, y_j)h$, $y_0 = y(t_0)$, aproxima una trayectoria dada $y = \varphi(t)$ por segmentos que se mueven a trayectorias cercanas $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, \dots , en el plano (t, y) .

Error de truncamiento. Supongamos que el PVI $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, se aproxima por un esquema numérico de un paso

$y_{j+1} = y_j + \Phi(t_j, y_j, y_{j+1}, h) h$. Se define el **error de truncamiento** local o **error de discretización** del esquema como:

$$\tau_{j+1} = \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{h} - \Phi(t_j, y(t_j), y(t_{j+1}), h), \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

donde sustituimos la solución exacta $y(t_j)$ en lugar de y_j . Si los τ_j desaparecen cuando $h \rightarrow 0$, decimos que las ecuaciones en diferencias son **consistentes** con la ecuación diferencial. Un esquema de un paso consistente es también **convergente**, es decir, el **error de truncamiento global** $e_j = y(t_j) - y_j$ tiende a 0 con h .

Nota: $e_{j+1} - e_j = h\Phi(t_j, y(t_j), y(t_{j+1}), h) - h\Phi(t_j, y_j, y_{j+1}, h) + h\tau_{j+1}$.

Para el **método de Euler** $\Phi(t_j, y_j, y_{j+1}, h) = f(t_j, y_j)$, el teorema de Taylor da

$$\begin{aligned} \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{h} &= \frac{y(t_j + h) - y(t_j)}{h} = \frac{dy(t_j)}{dt} + \frac{h}{2} \frac{d^2y(\xi)}{dt^2} \\ &= f(y(t_j), t_j) + \frac{h}{2} \frac{d^2y(\xi)}{dt^2} \implies \tau_{j+1} = \frac{h}{2} \frac{d^2y(\xi)}{dt^2} = O(h). \end{aligned}$$

Métodos de Heun y Runge-Kutta de orden 2 (RK2)

Heun:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[f(t_j, y_j) + f(t_j + h, p_{j+1})], \quad p_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j).$$

RK2:

$$y_{j+1} = y_j + Ahf(t_j, y_j) + Bhf(t_j + Ph, y_j + Qhf(t_j, y_j)),$$

con

$$A + B = 1, \quad BP = \frac{1}{2}, \quad BQ = \frac{1}{2}.$$

Heun es RK2 con $A = \frac{1}{2}$. Euler modificado (punto medio) es RK2 con $A = 0$.

Comportamiento a tiempos largos y control de los PVI

EDO lineal de primer orden:

$$y' + p(t)y = q(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0.$$

Solución:

$$y(t) = y_0 e^{-P(t)} + e^{-P(t)} \int_0^t e^{P(s)} q(s) ds, \quad P(t) = \int_0^t p(s) ds.$$

Entrada Acotada-Salida Acotada (EASA): $p(t)$ continua, $q(t)$ continua a trozos on $t \geq 0$, p_0 , M números positivos,

$$p(t) \geq p_0, \quad |q(t)| \leq M, \quad t \geq 0.$$

Entonces la solución del PVI:

$$|y(t)| \leq |y_0| + \frac{M}{p_0}, \quad t \geq 0.$$

Control de un reactor químico

EDO de primer orden lineal (reacción $A \rightarrow B$ con entrada con fugas de A en el reactor):

$$y' = \frac{r(t)}{V(t)} - ky \implies y' + ky = \frac{r(t)}{V(t)}.$$

Suponer: $V(t) \geq V_0 > 0$ (el reactor nunca funciona en seco), tasa de flujo de entrada acotada $r(t) \leq r_0$. Entonces $0 \leq \frac{r(t)}{V(t)} \leq \frac{r_0}{V_0}$,

Teorema EASA ($p_0 = k > 0$, $M = r_0/V_0$, $y(0) > 0$):

$$|y(t)| \leq y(0) + \frac{r_0}{kV_0}.$$

Supongamos que $y(t)$ no puede exceder $K > 0$ por especificaciones de diseño. Los criterios se cumplen para:

$$y(0) \leq \frac{K}{2}, \quad r_0 \leq \frac{kV_0K}{2} \implies |y(t)| \leq K.$$

Comportamiento a tiempos largos de EDOs autónomas

Teorema. Sean $f(y)$, $f'(y)$ continuas para toda y . Sea $y(t)$ una solución de la EDO $y' = f(y)$ que está acotada para toda $t \geq 0$ (respectivamente para toda $t < 0$). Entonces cuando $t \rightarrow +\infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$), $y(t)$ aproxima una solución de equilibrio de la EDO (y^* tal que $f(y^*) = 0$).

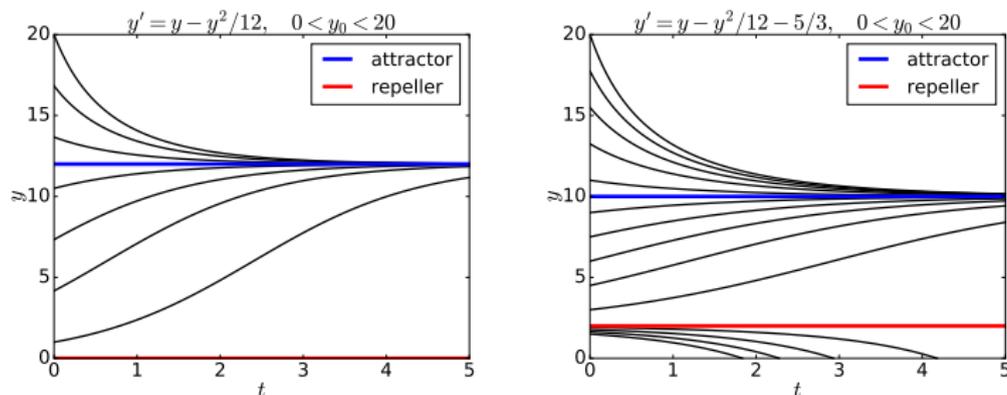


Figure: Línea de estado (fase) curvas solución para la EDO logística con consumo.

Sensitividad a los cambios en los datos

Soluciones de equilibrio atractor, repulsor y semiestable.

- **Atractor:** todas las curvas solución en un entorno del mismo se aproximan a él cuando $t \rightarrow +\infty$. Si y_0 es un **atractor**, entonces pequeños cambios en los datos iniciales cerca de y_0 **no tienen efectos** en el comportamiento de la solución a tiempos largos.
- **Repulsor:** todas las curvas solución que se encuentran en su entorno se alejan de él cuando $t \rightarrow +\infty$ (y se le aproximan cuando $t \rightarrow -\infty$). Si y_0 es una **solución de equilibrio repulsor o semiestable**, entonces pequeños cambios en los datos iniciales cercanos a y_0 **dan lugar a cambios drásticos** en la solución a tiempos largos.
- En un entorno lo suficientemente pequeño, una **solución mixta atractor/repulsor o semiestable** atrae todo dato inicial a un lado de este en un lado de la línea de fase y repele todos los datos iniciales en el otro lado.

Bifurcaciones: un modelo logístico con captura

Análisis de bifurcación de la EDO $y' = f(y, c)$. Etapas:

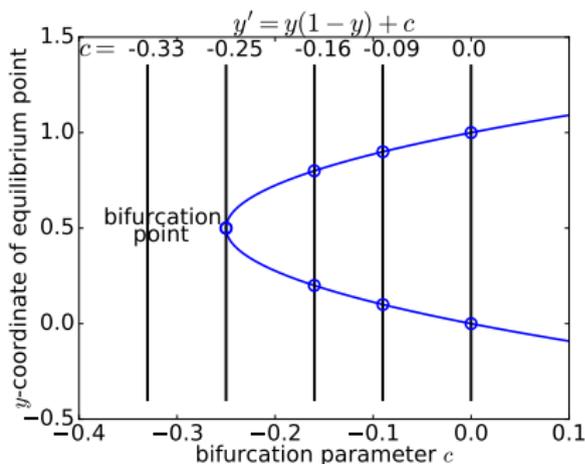
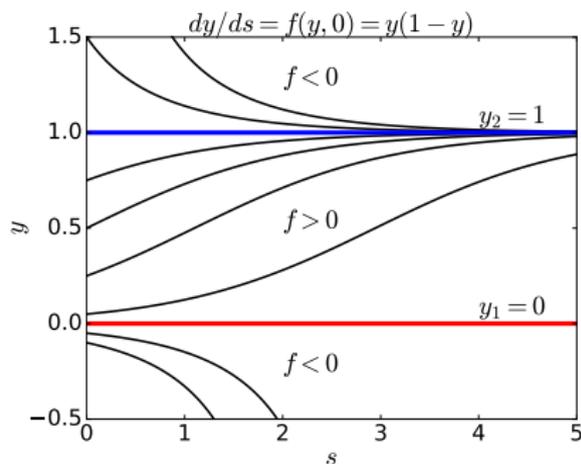
- Realizar un seguimiento de las soluciones de equilibrio cuando se mueven, se fusionan, se dividen o desaparecen con los cambios efectuados en el parámetro c .
- Describir los efectos cualitativos de estos cambios en c en el comportamiento a tiempos largos de las soluciones que no son de equilibrio.
- Resumir el comportamiento de la solución cuando c cambia en un diagrama de bifurcación.

Comportamientos típicos:

- Bifurcación de tipo nodo-silla (saddle-node) $y' = y(1 - y) + c$.
- Bifurcación de tipo tridente (pitchfork) $y' = (c - y^2)y$.

Bifurcaciones: un modelo logístico con captura

- Bifurcación de tipo nodo-silla (saddle-node) $y' = y(1 - y) + c$.



Bifurcaciones

- Bifurcación de tipo tridente (pitchfork) $y' = (c - y^2)y$.

