Cálculo Diferencial Aplicado

TEMA 2: Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

Autores:

Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin, Rocío Vega

Departamento de Ciencia e Ingeniería de Materiales e Ingeniería Química,

Universidad Carlos III de Madrid,

Grado en Ingeniería Informática y

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas.

I. EDOS DE SEGUNDO ORDEN LINEALES

Este tema trata el estudio de las EDOs de segundo orden lineales y sus correspondientes PVIs. Todas las nociones aquí descritas pueden ser inmediatamente generalizadas a EDOs de orden n-ésimo. Posteriormente, explicaremos cómo una teoría similar es capaz de resolver sistemas de EDOs de primer orden. Por ejemplo, el capítulo 3 de los libros de Boyce-Di Prima [1] y Simmons [4] contienen una descripción detallada y son lecturas recomendables.
La **forma general de una EDO de segundo orden lineal** es

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a_1(t)\frac{du}{dt} + a_0(t)u = F(t), \tag{1}$$

donde $a_j(t)$ son funciones continuas en el intervalo $[t_0, T]$, en el que queremos resolver la EDO.
Sabemos que si $u_p(t)$ es una **solución particular** de la ecuación no homogénea (1), entonces $v(t) = u(t) - u_p(t)$ resuelve la EDO homogénea:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a_1(t)\frac{du}{dt} + a_0(t)u = 0. \tag{2}$$

El **principio de superposición** establece que si $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son soluciones de (2), entonces $u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$, donde c_1 y c_2 son constantes, es también una solución. Comprobar estos enunciados es inmediato.
Hallar u_1, u_2 y u_p en términos de funciones elementales solamente puede hacerse en casos particulares, como veremos más adelante. Sin embargo, podemos elaborar una teoría general en el supuesto de que hemos sido capaces de hallar dichas funciones.

A. EDO de segundo orden lineal homogénea

Veremos que la solución general de (2) es una superposición de dos solucioneas **linealmente independientes** y por tanto la dimensión del espacio de las soluciones es dos. Por esta razón, necesitamos un criterio que nos permita distinguir soluciones linealmente independientes. ***Definición:***
Dadas dos funciones diferenciables $u_1(t)$ y $u_2(t)$, su **determinante Wronskiano** es

$$W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Lema 1.

Dos funciones diferenciables, $u_1(t)$ y $u_2(t)$, son linealmente dependientes sí y solo sí su determinante Wronskiano es idénticamente nulo.

Demostración.

Si $W(u_1, u_2) = 0$, tenemos que $u_1 u_2' - u_1' u_2 = 0$, y por tanto $u_1'/u_1 = u_2'/u_2$, que integrado da $\ln|u_1| = \ln|u_2| + c$. Se obtiene $u_1(t) = \pm e^c u_2(t)$ y por lo tanto $u_1(t) = k u_2(t)$, con la constante $k = \pm e^c$, y $u_1(t)$ depende linealmente de $u_2(t)$. El recíproco de este resultado es inmediato.

El deteminante Wronskiano se puede calcular directamente a partir de la EDO (2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(u_1, u_2) &= \frac{d}{dt}(u_1 u_2' - u_1' u_2) = u_1 u_2'' - u_1'' u_2 = u_1(-a_1 u_2' - a_0 u_2) - u_2(-a_1 u_1' - a_0 u_1) \\ &= -a_1(u_1 u_2' - u_1' u_2), \quad \text{y por lo tanto,} \\ \frac{d}{dt} W(u_1, u_2) &= -a_1(t) W(u_1, u_2), \end{aligned} \tag{4}$$

que se conoce como la **fórmula de Abel**.

La fórmula de Abel muestra que el determinante Wronkiano, o bien es distinto de cero, o bien es idénticamente nulo. De hecho, la ecuación (4) es una EDO de primer orden lineal que puede ser resuelta mediante el método de separación de variables:

$$W(u_1, u_2)(t) = W(u_1, u_2)(t_0) \exp\left[-\int_{t_0}^{t} a_1(s) ds\right], \tag{5}$$

y la única manera de que el Wronskiano sea nulo es que la constante de integración sea $W(u_1, u_2)(t_0) = 0$.

¿Cómo calculamos $u_1(t)$ y $u_2(t)$?

En general, podemos usar el teorema de existencia y unicidad y definir $u_1(t)$ como la única solución del PVI:

$$\begin{cases} u'' + a_1(t) u' + a_0(t) u = 0, \\ \quad u(t_0) = 1, \ u'(t_0) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

y $u_2(t)$ como la única solución del PVI:

$$\begin{cases} u'' + a_1(t) u' + a_0(t) u = 0, \\ \quad u(t_0) = 0, \ u'(t_0) = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Para usar el teorema de existencia y unicidad se necesita escribir la EDO de segundo orden como un sistema de dos EDOs de primer orden y comprobar que la función vectorial del lado derecho del sistema es de tipo Lipschitz.

Las soluciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ definidas por (6) y (7) son independientes debido a la fórmula de Abel (5) y que

$$W(u_1,u_2)(t_0) = \begin{vmatrix} u_1(t_0) & u_2(t_0) \\ u_1'(t_0) & u_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \tag{8}$$

de acuerdo con las condiciones iniciales dadas.

Podemos además demostrar que cualquier otra solución de (2) es una combinación lineal de u_1 y u_2.

Para comprobarlo, construimos el Wronskiano

$$W(u_1,u_2,u) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & u(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & u'(t) \\ u_1''(t) & u_2''(t) & u''(t) \end{vmatrix},$$

y usamos la ecuación (2) para mostrar que el este Wronskiano es indenticamente nulo. Esto demuestra que u_1, u_2 y u son limealmente dependientes y por lo tanto cualquiera de ellas puede ser escrita como una combinación lineal de las otras dos.

En otras palabras, hemos probado que **la dimensión del espacio de soluciones de la ecuación (2) es dos**.

Ejemplo 1.

$$u'' + 3u' + 2u = 1. \tag{9}$$

Claramente, $u_p = 1/2$ es una solución particular de (9).

Las soluciones de la EDO homogénea son de la forma: $u = e^{\lambda t}$. Insertando ésta en la EDO homogénea

$$u'' + 3u' + 2u = 0,$$

encontramos $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Sus soluciones son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$.

El determinante Wronskiano es

$$W(e^{-t}, e^{-2t}) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -2e^{-3t} + e^{-3t} = -e^{-3t} \neq 0, \tag{10}$$

lo que prueba que e^{-t} y e^{-2t} son independientes. Como no puede ser de otra forma, (10) concuerda con la fórmula de Abel (5).
Por tanto, la solución general del problema no homogéneo es

$$u(t) = \frac{1}{2} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}. \tag{11}$$

Nótese que las soluciones de (6) y (7) con $t_0 = 0$ son $u_1(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$ y $u_2(t) = e^{-t} - e^{-2t}$, respectivamente.

B. Variación de parámetros y EDOs no homogéneas

¿Qué sucede si no damos con una solución particular de (1) pero sí somos capaces de hallar soluciones de la ecuación homogénea (2)?
En general, podemos usar el **método de variación de parámetros** para soluciones conocidas $u_1(t)$ y $u_2(t)$ de la ecuación (2).
La idea consiste en reemplazar las constantes de integración c_1 y c_2 en la solución general por funciones desconocidas $y_1(t)$ e $y_2(t)$:

$$u(t) = y_1(t)u_1(t) + y_2(t)u_2(t). \tag{12}$$

Hemos introducido dos funciones incógnitas y_1 e y_2 en lugar de la incógnita original, $u(t)$. Por tanto podemos imponer una restricción adicional para obtener una solución única.
Si derivamos una vez (12),

$$u'(t) = y_1'(t)u_1(t) + y_2'(t)u_2(t) + y_1(t)u_1'(t) + y_2(t)u_2'(t), \tag{13}$$

e imponiendo que

$$y_1'(t)u_1(t) + y_2'(t)u_2(t) = 0, \tag{14}$$

garantizamos que la segunda derivada de $u(t)$ no contiene derivadas de segundo orden de y_j.
Las ecuaciones (13) y (14) dan

$$u'' = y_1'(t)u_1'(t) + y_2'(t)u_2'(t) + y_1(t)u_1''(t) + y_2(t)u_2''(t). \tag{15}$$

Insertando (13), (14) y (15) en (1), se obtiene

$$y_1(u_1'' + a_1u_1' + a_0u_1) + y_2(u_2'' + a_1u_2' + a_0u_2) + u_1'y_1' + u_2'y_2' = F(t). \tag{16}$$

Los coeficientes de y_1 e y_2 en esta ecuación son cero porque u_1 y u_2 son soluciones de la ecuación homogénea. Por tanto, hemos obtenido que

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = F(t). \tag{17}$$

Las ecuaciones (14) y (17) son dos EDOs de primer orden para las dos funciones incógnitas y_1 e y_2.

A partir de ellas obtenemos

$$\begin{cases} y_1' = -\frac{u_2 F}{W(u_1,u_2)}, \\ y_2' = \frac{u_1 F}{W(u_1,u_2)}, \end{cases} \tag{18}$$

tras efectuar algunas operaciones algebráicas. El lado derecho de estas ecuaciones son funciones de t conocidad y por lo tanto podemos hallar y_1 e y_2 por integración.

Insertando el resultado en (12), obtenemos

$$u(t) = \left[c_1 - \int_{t_0}^{t} \frac{u_2(s)F(s)}{W(u_1,u_2)(s)} ds\right] u_1(t) + \left[c_2 + \int_{t_0}^{t} \frac{u_1(s)F(s)}{W(u_1,u_2)(s)} ds\right] u_2(t), \tag{19}$$

que resulta ser la solución general de la ecuación (1).

Comprobemos la ecuación (19) en el caso del Ejemplo 1.

Tenemos que $F = 1$, $u_1 = e^{-t}$, $u_2 = e^{-2t}$ y $W(u_1, u_2) = -e^{-3t}$ de acuerdo con (10).

Entonces (18) se convierte en

$$\begin{cases} y_1' = -\frac{e^{-2t}}{-e^{-3t}} = e^{t}, \\ y_2' = \frac{e^{-t}}{-e^{-3t}} = -e^{2t}. \end{cases} \tag{20}$$

Por tanto $y_1 = e^t$ e $y_2 = -e^{2t}/2$.

La solución particular es pues $u_p = y_1 u_1 + y_2 u_2 = 1 - 1/2 = 1/2$, que coincide con la que obtuvimos antes por simple inspección de la EDO.

C. Método de los coeficientes indeterminados

Este método está basado en conjeturas bien estructuradas y, cuando funciona, es más rápido que el método de variación de los parámetros.

Se puede aplicar a EDOs de segundo orden o de órdenes superiores, con coeficientes constantes, cuando el término de fuente es una combinación aditiva o multiplicativa de las funciones e^t, $\sin t$, $\cos t$ y polinomios en la variable independiente t, o bien, ecuaciones equidimensionales donde $F(t)$ es un polinomio en t.

1. **EDOs lineales con coeficientes constantes**

La idea consiste en probar una **solución particular** con **parámetros indeterminados** que tenga la misma forma que el término de fuente $F(t)$.
Vamos a ilustrar este método mediante unos ejemplos:

Ejemplo 2.

(a) Para resolver $u'' + u = e^t \sin t$, probamos una **solución particular** de la forma $u_p = ae^t \sin t + be^t \cos t$ y hallamos los ***coeficientes indeterminados*** a y b mediante sustitución en la EDO.
Resultado: $u_p'' + u_p = e^t[(a-2b)\sin t + (2a+b)\cos t] = e^t \sin t$.
Esto implica que $a - 2b = 1$ y $2a + b = 0$, y por tanto $a = 1/5$, $b = -2/5$.

(b) Para resolver $u'' - u = e^t$, no podemos probar con $u_p = ae^t$ porque e^t es una **solución de la EDO homogénea**. En su lugar, probamos con $u_p = ate^t$ que da $u_p'' - u_p = 2ae^t = e^t$, por tanto, $a = 1/2$.
Así pues, en un ejemplo similar $u'' + u = \cos t$, probamos $u_p = at \sin t$, obteniendo de nuevo $a = 1/2$.

(c) Para resolver $u'' + u = t^3 - 2t$, probamos $u_p = at^3 + bt^2 + ct + d$, por tanto, $u_p'' + u_p = at^3 + bt^2 + (c + 6a)t + d + 2b = t^3 - 2t$, con lo que, $a = 1$, $b = d = 0$, $c = -8$.

Ejemplo 3.

Consideremos la ecuación $u'' + 2u' + u = e^{-t}$.
Una solución particular de la forma $u_p = ae^t$ no funciona porque e^{-t} es una solución de la EDO homogénea.
¿Qué sucede con $u_p = ate^{-t}$**?**.
Resulta que ésta es también una solución de la ecuación homegénea.
Definamos $Lu = u'' + 2u' + u$. Tenemos $L(te^{-t}) = te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-t} - 2te^{-t} + te^{-t} = 0$.
¿Qué es lo que está pasando?

$Le^{\lambda t} = (\lambda^2 + 2\lambda + 1)e^{\lambda t} = (\lambda + 1)^2 e^{\lambda t}$, y encontramos que hay solo una solución $\lambda = -1$ de la ecuación $(\lambda + 1)^2 = 0$.

Cuando encontramos un cero doble del polinomio característico, entonces las dos soluciones independientes de la EDO homogénea son $e^{\lambda t}$ y $te^{\lambda t}$.

Esto es una regla general, tal y como mostraremos tras finalizar este ejemplo.

De todos modos, debemos probar $at^2 e^{-t}$ como una solución:

$$L(at^2 e^{-t}) = (2a + at^2 - 4at + 4at - 2at^2 + at^2)e^{-t} = 2ae^{-t}$$

y por tanto $a = 1/2$.

La solución general de $u'' + 2u' + u = e^{-t}$ es $u(t) = (\frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_2)e^{-t}$.

Para saber qué sucede cuando $\lambda = \lambda_0$ es un **cero doble del polinomio característico**, consideramos el operador $L = (d/dt - \lambda_0)^2$. Sabemos que $e^{\lambda_0 t}$ es una solución, por tanto probamos con $u = v(t)e^{\lambda_0 t}$.

Encontramos que

$$Lu = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)(v' e^{\lambda_0 t}) = v'' e^{\lambda_0 t},$$

y por lo tanto $L(ve^{\lambda_0 t}) = 0$ implica $v'' = 0$, así $v' = c$ y $v = ct + d$.

Entonces $u = ve^{\lambda_0 t} = (ct + d)e^{\lambda_0 t}$ que es la solución general de la EDO homegénea $Lu = 0$.

2. EDOs lineales con coeficientes constantes

Consideremos la EDO de orden n, homogénea y lineal:

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + a_0 u = 0, \tag{21}$$

que puede ser escrita como

$$p_n(D)u \equiv [D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_0]u = 0, \tag{22}$$

donde $D = d/dt$ y $p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ es un polinomio de grado n.

Podemos factorizar el polinomio usando sus n raíces (reales o complejas) así:

$p_n(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n)$.

Entonces la ecuación (22) puede escribirse como

$$(D - \alpha_1) \ldots (D - \alpha_n)u = 0. \tag{23}$$

Si **todas las raíces α_j son reales y distintas**, la conmutatividad de los factores en la ecuación (23) implica que u debe satisfacer $(D-\alpha_j)u=0$ para cada j. Esto significa que $u'=\alpha_j u$ cuya solución es $u(t)=c_j e^{\alpha_j t}$. La solución general, por tanto, es $u(t)=\sum_{j=1}^n c_j e^{\alpha_j t}$.

Si α_j es compleja, digamos para $j=1$ con $\alpha_1=\mu+i\nu$, entonces hay otra raíz, que es su raíz compleja conjugada, de modo que tendremos dos soluciones $e^{(\mu\pm i\nu)t}=e^{\mu t}(\cos\nu t\pm i\sin\nu t)$. Este par de raíces complejas conjugadas contribuirán $e^{\mu t}(c_1\cos\nu t+c_2\sin\nu t)$ a la solución general de la EDO.

¿Qué sucede si hay raíces múltiples?. Sea α una raíz con multiplicidad l. Entonces $p_n(D)$ contendrá un factor $(D-\alpha)^l$ en su factorización. La ecuación $(D-\alpha)^l u=0$ tiene una solución obvia $u=e^{\alpha t}$. Buscamos sus otras soluciones como $u=e^{\alpha t}v(t)$. Tenemos $(D-\alpha)e^{\alpha t}v=e^{\alpha t}v'$, y por tanto $0=(D-\alpha)^l u=e^{\alpha t}D^l v$, y obtenemos $v^{(l)}=0$. Esto implica que $v(t)=c_0+c_1t+\dots c_{l-1}t^{l-1}$ (polinomio de grado $(l-1)$) y por lo tanto

$$\begin{aligned} u(t) &= (c_0+c_1t+\dots c_{l-1}t^{l-1})e^{\alpha t}+\dots \qquad \text{si } \alpha \text{ es real, y} \\ u(t) &= (c_0+c_1t+\dots c_{l-1}t^{l-1})e^{\mu t}\cos\nu t+(d_0+d_1t+\dots d_{l-1}t^{l-1})e^{\mu t}\sin\nu t+\dots, \end{aligned} \tag{24}$$

si $\alpha=\mu+i\nu$ y su complejo conjugado tiene multiplicidad l.

En el caso de EDOs no homogéneas con raíces reales distintas α_j, podemos escribir formalmente las solución como

$$u=\frac{1}{p_n(D)}F(t)=\frac{1}{\prod_{j=1}^n(D-\alpha_j)}F(t)=\sum_{j=1}^n\frac{A_j}{D-\alpha_j}F(t)=\sum_{j=1}^n A_j\int_{t_0}^t e^{\alpha_j(t-s)}F(s)ds. \tag{25}$$

Cada $(D-\alpha_j)^{-1}F(t)$ es la solución de la EDO de primer orden no homogénea $(D-\alpha_j)w=F(t)$, por tanto $(D-\alpha_j)^{-1}F(t)=\int_{t_0}^t e^{\alpha_j(t-s)}F(s)ds$, como escribimos arriba.
Los casos con raíces complejas y múltiples se dejan como tarea para el lector.

3. EDOs equidimensionales

Las EDOs lineales **equidimensionales (o de Euler)** se llaman así porque son invariantes bajo el cambio de escala $t\to at$.

Tienen la siguiente forma:

$$\frac{d^n u}{dt^n} + \frac{a_{n-1}}{t}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \ldots + \frac{a_1}{t^{n-1}}\frac{du}{dt} + \frac{a_0}{t^n}u = F(t). \tag{26}$$

Consideremos el caso homogéneo primero.

La EDO equidimensional se puede transformar en una EDO de coeficientes constantes usando el **cambio de variables**:

$$t = e^x, \quad t\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx}. \tag{27}$$

De forma alternativa, se pueden resolver por **sustitución directa** de $u = t^\lambda$ en la ecuación (26) con $F = 0$:

$$[\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) + a_{n-1}\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2) + \ldots + a_1\lambda + a_0]t^{\lambda-n} = 0. \tag{28}$$

Igual que en las EDOs con coeficientes constantes, λ es una de las raíces del polinomio resultante.

Ejemplo 4.

Insertando $u = t^\lambda$ en $u'' + u'/t - u/t^2 = 0$, encontramos $\lambda(\lambda-1) + \lambda - 1 = 0$. Entonces $\lambda^2 = 1$ y $\lambda = \pm 1$. La solución general de esta EDO es $u(t) = c_1 t + c_2/t$.

Los mismos resultados se obtienen tras hacer el cambio de variables $t = e^x$ o $x = \ln t$. $du/dt = t^{-1}du/dx$, $d^2u/dt^2 = (d/dt)[t^{-1}du/dx] = -t^{-2}du/dx + t^{-2}d^2u/dx^2$.

Entonces $t^2u'' + tu' - u = d^2u/dx^2 - du/dx + du/dx - u = d^2u/dx^2 - u$, y la ecuación $d^2u/dx^2 - u = 0$ tiene las soluciones $u = c_1e^x + c_2e^{-x}$ que se convierten en $u = c_1t + c_2/t$, una vez que volvemos a usar la variable t.

Ejemplo 5.

El mismo procedimiento aplicado a la ecuación $u'' + u/(4t^2) = 0$ da $\lambda(\lambda-1) + 1/4 = 0$ que equivale a $(\lambda - 1/2)^2 = 0$. En este caso $\lambda = 1/2$ es una raíz doble. Una de las soluciones tiene la forma $u_1 = t^{1/2}$ pero, ¿Cómo es la otra?. Cuando conocemos una solución $u_1(t)$ de una EDO de alto orden lineal y homogénea, el cambio $u = u_1v$ da lugar a una EDO de primer orden más simple, para v':

$$u'' - \frac{u}{4t^2} = v''u_1 + 2v'u_1' + vu_1'' - \frac{vu_1}{4t^2} = 0.$$

Los dos últimos términos de esta ecuación se cancelan y por tanto tenemos una EDO de primer orden lineal para $z = v'$: $u_1z' + 2u_1'z = 0$.

Multiplicando esto por u_1 tenemos $u_1^2 z' + z(u_1^2)' = 0$, que da $u_1^2 z = c$.
Por tanto tenemos $z = v' = c/u_1^2 = c/t$. Integrando de nuevo, encontramos $v = c \ln t$.
Entonces la otra solución es $u = u_1 v = t^{1/2} \ln t$, y la solución general de la EDO es $u(t) = c_1 t^{1/2} + c_2 t^{1/2} \ln t$.
El mismo resultado se puede obtener mediante el cambio de variable $x = e^t$.

Ejemplo 6.

(a) Para resolver $u'' - u/t^2 = t^4 + t^3$, suponemos una solución particular de tipo polinomio $u_p = at^6 + bt^5$. Por tanto, $u_p'' - u_p/t^2 = (30a - a)t^4 + (20b - b)t^3 = t^4 + t^3$. Obtenemos $a = 1/29$ and $b = 1/19$.

(b) Para resolver $u'' + tu' + 2u = 1$, suponemos $u_p = a$ que da $a = 1/2$, mientras que para resolver $u'' + tu' + 2u = t^4$, suponemos $u_p = at^4 + bt^2 + c$, por tanto $u_p'' + tu_p' + 2u_p = (4a + 2a)t^4 + (12a + 2b + 2b)t^2 + (2b + 2c) = t^4$ y obtenemos $6a = 1$, $12a + 4b = 0$, $c = -b$. Así pues, $a = 1/6$, $b = -1/2$, $c = 1/2$; $u_p = \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$.

Ejemplo 7.

Para resolver la EDO $t^2 u'' + u/4 = t^{1/2}$, suponemos $u_p = at^{1/2}(\ln t)^2$. Se obtiene $a = 1/2$. La razón es que la EDO homogénea es equidimensional con un cero doble, $\lambda = 1/2$, por tanto, $t^{1/2}$ y $t^{1/2} \ln t$ son ambas soluciones de la EDO homogénea. La solución propuesta aumenta en uno el grado de la función polinómica en $\ln t$ que multiplica a $t^{1/2}$.

D. Reducción de orden

Cuando conocemos una solución de una EDO lineal (homogénea o no), podemos reducir su orden factorizando dicha solución.
Sea $u_1(t)$ una solución de $Lu = 0$. Entonces buscamos soluciones linealmente independientes de la forma

$$u(t) = u_1(t)v(t). \tag{29}$$

Sustituyendo esta expresión de $u(t)$ en $Lu = 0$, se obtiene una nueva ecuación para v de la forma $Mv = 0$, que no contiene un término de la forma $a_0(t)v$.

Por tanto, $Mv = 0$ es una EDO lineal homegénea de orden $(n-1)$ para $w(t) = v'(t)$ si $Lu = 0$ es de orden n.
Anteriormente ya hemos usado la reducción de orden en los ejemplos del método de los coeficientes indeterminados.

Ejemplo 8.
Obsérvese que la suma de los coeficientes de la EDO $u'' - u'(1+t)/t + u/t = 0$ es 0.
Resulta que una solución es $u = e^t$. Entonces proponemos $u = e^t v$ y obtenemos $[v'' + 2v' - v'(1+t)/t]e^t = 0$ que da $v'' + (1 - 1/t)v' = 0$. Entonces $z'/z = -1 + 1/t$ para $z = v'$ y $\ln z = \ln t - t + \ln c$ dando $z = v' = te^{-t}$.
Una integración más da $v = (1+t)e^{-t}$, y la otra solución de la EDO original es $u = 1 + t$.
Finalmente, la solución general es una combinación lineal: $u(t) = c_1(1+t) + c_2 e^t$.

Ejemplo 9.
Para reducir el orden de la EDO no homogénea $u'' - u'(1+t)/t + u/t = te^t$, sustituimos $u = e^t v$ como antes. Obtenemos $v'' + (1 - 1/t)v' = t$, y por lo tanto $z' + (1 - 1/t)z = t$. Multiplicando esta EDO por el factor integrante e^t/t, se obtiene $(e^t z/t)' = e^t$, por tanto $e^t z/t = e^t$. Entonces $z = v' = t$ y $v = t^2/2$.
Hemos encontrado la solución particular $u_p = t^2 e^t/2$, por lo que la solución general es $u = \frac{1}{2}t^2 e^t + c_1 e^t + c_2(1+t)$.

II. MATERIAL COMPLEMENTARIO: OSCILADOR LINEAL Y RESONACIA

A. Oscilador no forzado

Cosideremos un **péndulo amortiguado**.
La fuerza que actúa sobre su masa es $-mg\sin\theta - \gamma\dot{\theta}$, donde $\dot{\theta} = d\theta/dt$ y γ es el coeficiente de amortiguación.
La aceleración es $ml\ddot{\theta}$, donde l es la longitud del péndulo.
La segunda ley de Newton da lugar a

$$\ddot{\theta} + \frac{\gamma}{ml}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0. \tag{30}$$

Si estamos interesados en pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio $\theta = 0$, entonces podemos aproximar $\sin\theta \approx \theta$ y la ecuación (30) se convierte en

$$\ddot{\theta} + \frac{\gamma}{ml}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{31}$$

Como veremos a continuación, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ es la **frecuencia natural del oscilador** en la ecuación (31).

Es conveniente dejar el tiempo sin dimensiones definiendo un nuevo tiempo $\tilde{t} = \omega_0 t$.

Entonces la ecuación (31) se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{d\tilde{t}^2} + 2\beta\frac{d\theta}{d\tilde{t}} + \theta = 0, \tag{32}$$

$$\beta = \frac{\gamma}{2m\sqrt{gl}}, \tag{33}$$

donde $\beta > 0$ es un parámetro sin dimensiones.

De ahora en adelante, estudiaremos la ecuación (32) omitiendo la tilde sobre el tiempo adimensional. Para recuperar el tiempo con dimensiones, reemplazaremos $\omega_0 t$ en lugar de t en las fórmulas resultantes.

La solución de (32) se halla insertando $\theta = e^{\lambda t}$ en dicha ecuación, obteniendo así

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + 1 = 0, \tag{34}$$

cuyas soluciones son

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}. \tag{35}$$

Hay **tres casos posibles**:

(i) Oscilador sobreamortiguado: $\beta > 1$,

(ii) oscilador amortiguado: $\beta < 1$,

(iii) oscilador no amortiguado: $\beta = 0$.

1. Oscilador sobreamortiguado $\beta > 1$

Las dos soluciones de (35) son reales y negativas.

La solución general de la EDO (32) es

$$\theta(t) = ae^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-1})t} + be^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-1})t}. \tag{36}$$

Para cualquier condición inicial, $\theta \to 0$ cuando $t \to \infty$. Dado que $\beta - \sqrt{\beta^2 - 1} < \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$, el segundo término en (36) tiende a 0 más lentamente que el primero siempre que a y b sean ambos distintos de 0.

En el caso límite $\beta = 1$ las dos soluciones en (35) son iguales a -1.

La solución general es ahora

$$\theta(t) = (a + bt)e^{-t}. \tag{37}$$

2. **Oscilador amortiguado** $\beta < 1$

Ahora las soluciones (35) son complejas conjugadas entre sí.

Si definimos $\Omega = \sqrt{1 - \beta^2}$, $\lambda = -\beta \pm i\Omega$. Dado que $e^{-\beta t \pm i\Omega t} = e^{-\beta t}[\cos(\Omega t) \pm i \sin(\Omega t)]$, podemos escribir la solución general de (32) como

$$\theta(t) = e^{-\beta t}[a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)] = ce^{-\beta t}\cos(\Omega t + \phi), \tag{38}$$

donde a, b, c y ϕ son números reales.

La solución (38) representa oscilaciones amortiguadas con **frecuencia** Ω, **cambio de fase** ϕ y **tiempo de relajación** $1/\beta$.

3. **Oscilador no amortiguado**

Para $\beta = 0$, la solución general de (32) es

$$\theta(t) = a\cos t + b\sin t = c\cos(t + \phi). \tag{39}$$

Hay oscilaciones no amortiguadas de **amplitud** c, frecuencia unidad y periodo 2π.

B. Resonancia

Supongamos que hay una fuerza actuando periódicamente sobre el oscilador con frecuencia ω (continuamos usando unidades sin dimensiones).

En lugar de (32), ahora tenemos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta\frac{d\theta}{dt} + \theta = \cos(\omega t). \tag{40}$$

Podemos escribir el coeficiente de $\cos(\omega t)$ en (40) como 1, sin pérdida de generalidad.

Usando el **método de los coeficientes indeterminados**, buscamos una **solución particular**

$$\theta_p = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t), \tag{41}$$

que insertada en (40) da

$$[(1-\omega^2)a + 2\beta\omega b]\cos(\omega t) + [(1-\omega^2)b - 2\beta\omega a]\sin(\omega t) = \cos(\omega t). \tag{42}$$

Supuesto $\omega^2 \neq 1$, entonces encontramos

$$a = \frac{1-\omega^2}{(1-\omega)^2 + 4\beta^2\omega^2} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-\omega)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad b = \frac{2\beta\omega}{(1-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \tag{43}$$

Insertando esto en (41), obtenemos

$$\theta_p = \frac{\cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \tag{44}$$

El mismo resultado se obtiene tomando la parte real de la solución $Ae^{i\omega t}$, con $A = e^{-i\varphi}/\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$ de (40) con lado derecho $e^{i\omega t}$.

Por lo tanto, la respuesta del oscilador a una **fuerza armónica** es **armónica** con una **amplitud** $1/\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$, la misma **frecuencia** y **cambio de fase** φ dado por (43).

La amplitud tiene un valor máximo $1/(2\beta)$ para $\omega^2 = 1$, que se convierte en infinito en el caso no amortiguado $\beta = 0$.

¿Qué sucede entonces?

Claramente, para $\omega = 1$ y $\beta = 0$, tenemos que resolver la EDO $\ddot{\theta} + \theta = \cos t$ y $\cos t$ es una solución de la correspondiente EDO homogénea.

De acuerdo con el **método de los coeficientes indeterminados**, conjeturamos que $\theta_p = at\sin t$, y obtenemos $a = 1/2$ mediante inserción en la ecuación.

La amplitud de las oscilaciones descritas por esta solución es $t/2$, que crece linealmente con el tiempo.

Este fenómeno se denomina ***resonancia*** entre la frecuencia de la fuerza, ω, y la frecuencia natural del oscilador no forzado, 1.

Es conveniente visualizar el fenómeno de la resonancia cuando $\omega \to 1$.

Para $\beta = 0$ y $\omega \neq 1$, la solución general es

$$\theta(t) = \frac{\cos(\omega t)}{1-\omega^2} + a\cos t + b\sin t. \tag{45}$$

Si inicialmente $\theta = 0$ y $\dot{\theta} = 0$, (45) se convierte en

$$\theta(t) = \frac{\cos(\omega t) - \cos t}{1 - \omega^2} = \frac{2\sin[(1-\omega)t/2]}{1-\omega^2} \sin\left(\frac{\omega + 1}{2} t\right). \tag{46}$$

Esta es una oscilación "**rápida**" de periodo $P_+ = 4\pi/(\omega + 1)$ modulada por una oscilación "**lenta**" de periodo $P_- = 4\pi/|1 - \omega|$ y "amplitud" $\frac{2\sin[(1-\omega)t/2]}{1-\omega^2}$.
Cuando $\omega \to 1$, esta amplitud tiende a su pendiente en el origen, esto es, $t/2$ y (46) da lugar a la solución resonante $\theta = (t/2)\sin t$.

[1] W.E. Boyce and R.C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems. 9th ed. John Wiley & Sons, N.Y. 2009.

[2] C. M. Bender and S.A. Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. McGraw Hill, N.Y. 1978. Chapter 1.

[3] G. F. Carrier and C. E. Pearson, Ordinary Differential Equations. SIAM Classics in Applied Mathematics **6**. SIAM, PA 1991. Chapter 3.

[4] G. F. Simmons, Differential equations with applications and historical notes. 2nd ed. MacGraw Hill, N.Y. 1991. Chapter 3.