Cálculo Diferencial Aplicado

TEMA 3: Sistemas de ecuaciones diferenciales.

Autores:

Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin, Rocío Vega

Departamento de Ciencia e Ingeniería de Materiales e Ingeniería Química,

Universidad Carlos III de Madrid,

Grado en Ingeniería Informática y

Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas.

I. SISTEMAS DE EDOS DE PRIMER ORDEN

Este tema trata sobre los sistemas de EDOs de primer orden y sus PVIs relacionados.
La forma general de un sistema de n EDOs de primer orden es

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= f_1(u_1, \ldots, u_n, t), \\ &\ldots \\ \frac{du_n}{dt} &= f_n(u_1, \ldots, u_n, t). \end{aligned} \tag{1}$$

Si las funciones f_j y todas sus primeras derivadas parciales respecto a las variables u_k son funciones continuas en una región R conteniendo a $(u_1(t_0), \ldots, u_n(t_0))$ y a t_0, el **teorema de existencia y unicidad** implica que hay una **única solución** del sistema (1) que satisface la condición inicial en una subregión de R.
Si las funciones f_j en (1) son independientes de la variable t, el sistema de EDO se llama ***autónomo***, de lo contrario se llama ***no-autómo***.
Cualquier sistema no autónomo de n-ésimo orden es equivalente a un sistema autónomo de orden $(n+1)$ dado por (1), tomando como nueva incógnita a u_{n+1} en lugar de t en las funciones $f_j(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ y añadiendo al sistema la ecuación: $du_{n+1}/dt = 1$.

La **forma general de un sistema de n EDOs de primer orden *lineales*** es

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= a_{11}(t)u_1 + \ldots + a_{1n}(t)u_n + F_1(t), \\ &\ldots \\ \frac{du_n}{dt} &= a_{n1}(t)u_1 + \ldots + a_{nn}(t)u_n + F_n(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Las ecuaciones (2) pueden ser escritas como una EDO vectorial:

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{\underline{A}}(t)\,\underline{u} + \underline{F}(t), \tag{3}$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ & \ldots & \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{F}(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ \ldots \\ F_n(t) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Para un sistema homogéneo, $\underline{F}(t) = 0$, se tiene la siguiente **fórmula de Abel**:

$$\frac{d}{dt} W(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n) = \mathrm{Tr}\underline{\underline{A}}(t)\, W(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n), \quad W(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n) = \det(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n). \tag{5}$$

Para probar esta fórmula, primero definimos una **matriz fundamental** cuyas columnas son n soluciones independientes del sistema homogéneo, $\underline{\underline{\Phi}} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)$.
Esta matriz satisface la ecuación: $\frac{d}{dt}\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\Phi}}$.
Ahora diferenciamos la identidad ln det $\underline{\underline{\Phi}}$ = Tr ln$\underline{\underline{\Phi}}$, con det $\underline{\underline{\Phi}} = W(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)$, obteniendo así

$$\frac{1}{W}\frac{d}{dt}W = \mathrm{Tr}\left[\underline{\underline{\Phi}}^{-1}\frac{d}{dt}\underline{\underline{\Phi}}\right] = \mathrm{Tr}[\underline{\underline{\Phi}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\Phi}}] = \mathrm{Tr}[\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\underline{\Phi}}^{-1}] = \mathrm{Tr}\underline{\underline{A}},$$

que es la **identidad de Abel**.
La fórmula ln(det $\underline{\underline{\Phi}}$) = Tr(ln$\underline{\underline{\Phi}}$) se sigue a partir de las identidades $\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \det\underline{\underline{A}}\,\det\underline{\underline{B}}$ y $\mathrm{Tr}(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \mathrm{Tr}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})$ válida para matrices cualesquiera $\underline{\underline{A}}$ y $\underline{\underline{B}}$.
Definiendo $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}^{-1}$, $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\underline{R}}$, $\underline{\underline{R}}$ la **matriz de autovectores** de $\underline{\underline{\Phi}}$, y $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\underline{R}}$, la **matriz diagonalizada** con los **autovalores** de $\underline{\underline{\Phi}}$, podemos probar que
$\ln(\det\underline{\underline{\Phi}}) = \ln\Pi_{j=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}\ln\lambda_i = \mathrm{Tr}(\ln\underline{\underline{\Phi}})$, donde λ_i son los autovalores de $\underline{\underline{\Phi}}$.

A. Sistemas lineles autónomos

Son de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= a_{11}u_1 + \ldots + a_{1n}u_n,\\ &\ldots\\ \frac{du_n}{dt} &= a_{n1}u_1 + \ldots + a_{nn}u_n.\end{aligned} \tag{6}$$

La ecuación (6) se puede escribir como una EDO vectorial:

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{u}, \tag{7}$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Buscamos una solución de esta ecuación de la forma $\underline{u}(t) = \underline{U}e^{\lambda t}$ que, insertada en la ecuación (7) da lugar al **problema de autovalores**:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{U} = \lambda\underline{U}. \tag{9}$$

Si la matriz $\underline{\underline{A}}$ tiene n **autovalores diferentes** λ_j con **autovectores** $\underline{\Phi}_j$, $j = 1, \ldots, n$, el **principio de superposición** implica que la **solución general** de la ecuación (7) es la combinación lineal

$$\underline{u}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} \underline{\Phi}_j, \tag{10}$$

donde las constantes c_j son arbitrarias.

B. Sistemas lineales homogéneos bidimensionales

En este caso, la **matriz de los coeficientes** es

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{con } \tau = \mathrm{Tr}\underline{\underline{A}} = a + d, \quad \Delta = \det\underline{\underline{A}} = ad - bc. \tag{11}$$

El **problema de autovalores** conduce a la ecuación

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0 \Longrightarrow \lambda_j = \frac{\tau + (-1)^j\sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad j = 1, 2, \tag{12}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \tau, \quad \lambda_1\lambda_2 = \Delta. \tag{13}$$

Hay varios **casos** a considerar:

1. Caso $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, equivalentemente, $\Delta < 0$.

Sea $\underline{\Phi}_j$ el **vector propio** correspondiente al **autovalor** λ_j. La **solución general** (10) (con $n = 2$) se convierte en $c_2\underline{\Phi}_2 e^{\lambda_2 t}$ cuando $t \to \infty$ siempre que $c_2 \neq 0$ y da lugar a $c_1\underline{\Phi}_2 e^{\lambda_1 t}$ cuando $t \to -\infty$ supuesto $c_1 \neq 0$.

La solución especial con $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ tiende a $(0, 0)$ cuando $t \to -\infty$ y se aleja desde el origen cuando $t \to \infty$.

De modo similar, las soluciones con $c_2 = 0$, $c_1 \neq 0$ tienden a $(0, 0)$ cuando $t \to \infty$ y se alejan del origen cuando $t \to -\infty$.

Estas soluciones especiales se llaman **separatrices** y son líneas rectas con pendientes $u_2/u_1 = \Phi_{22}/\Phi_{21}$ $(c_1 = 0)$ y $u_2/u_1 = \Phi_{12}/\Phi_{11}$ $(c_2 = 0)$.

En este caso, el origen es una solución correspondiente a $c_1 = c_2 = 0$ llamada un ***punto de silla***.

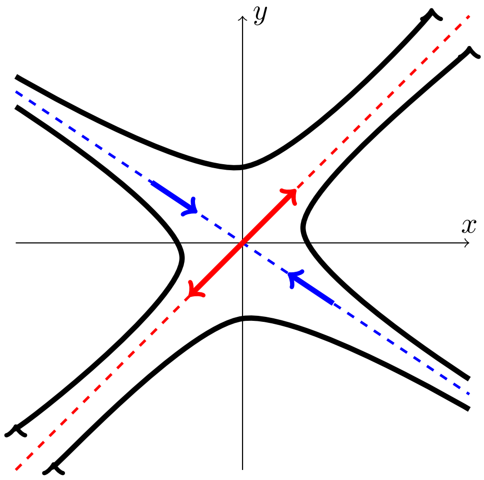


FIG. 1: Retrato de fase de un punto de silla.

En el ***plano fásico*** (u_1, u_2), las soluciones (10) (con $n = 2$ y para c_1 y c_2 distintas) son curvas llamadas ***trayectorias***.

Exceptuando las separatrices, todas las trayectorias son hipérbolas que tienen por asíntotas a las separatrices.

Nótese que en cualquier entorno del origen hay puntos tales que las trayectorias que pasan por ellos abandonan el entorno tras algún tiempo positivo.

Esto significa que el origen es un ***punto fijo inestable*** (Las soluciones del sistema de EDOs se llaman **puntos fijos**: para la ecuación (7) el origen es el único punto fijo).

Un esquema conteniendo el punto de silla, las separatrices y unas pocas trayectorias se conoce como un ***retrato de fase***. Véase la figura 1.

2. **Caso $\tau^2 > 4\Delta > 0$.**

En este caso, los autovaloresson son números reales y ambos son positivos o ambos son negativos.

Considermos primero que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Entonces $e^{\lambda_1 t} \ll e^{\lambda_2 t}$ para $t > 0$ suficientemente grande. Esto significa que $\underline{u}(t) \sim c_2 \underline{\Phi}_2 e^{\lambda t}$ si $c_2 \neq 0$. Eventualmente todas las trayectorias tienden hacia el origen cuando $t \to \infty$ y, para $c_2 \neq 0$, se aproximan a la línea recta $u_2/u_1 = \Phi_{22}/\Phi_{21}$ cuando $t \to \infty$. Esta línea es la dirección normal de aproximación al

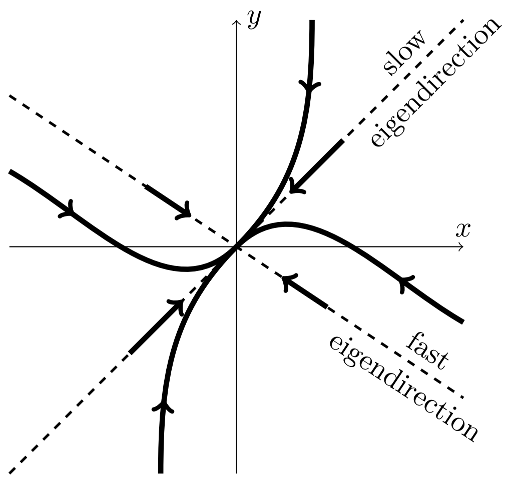


FIG. 2: Retrato de fase de un nodo asintóticamente estable.

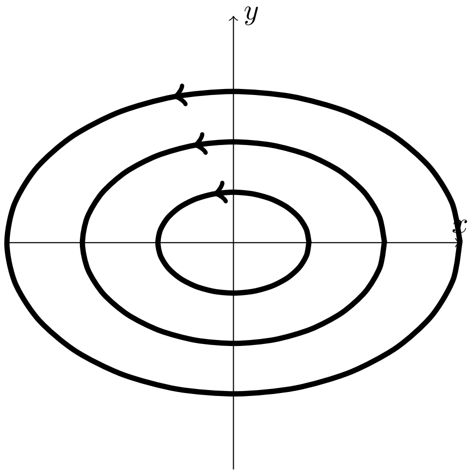
origen (autodirección lenta). Para condiciones iniciales especiales, tales como $c_2 = 0$, las trayectorias son líneas rectas $u_2/u_1 = \Phi_{12}/\Phi_{11}$ entrando hacia el origen cuando $t \to \infty$ y constituye la dirección excepcional de aproximación al origen (autodirección rápida).
Nótese que, cuando $t \to -\infty$, todas las trayectorias escapan del origen y se aproximan a la dirección excepcional.
Todos los puntos en un entorno del origen tienden al origen cuando $t \to \infty$. En este caso se dice que el origen es un ***nodo asintóticamente estable***. Véase la Figura 2.

El caso $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ se obtiene a partir del anterior reemplazando $-t$ en lugar de t.
Todas las trayectorias escapan del origen, el cual se considera un ***nodo inestable***.

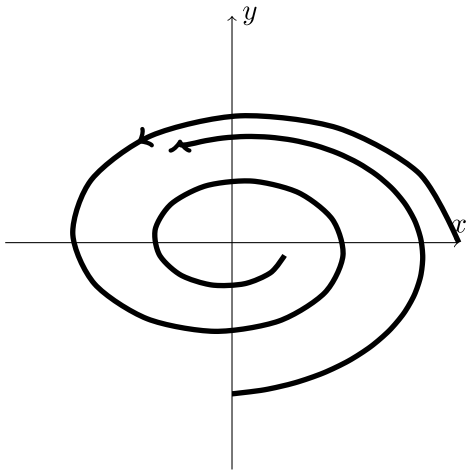
3. **Caso $0 < \tau^2 < 4\Delta$.**

Los autovalores son complejos: $\lambda = \tau/2 + i\Omega$ y $\overline{\lambda} = \tau/2 - i\Omega$, donde $\Omega = \sqrt{\Delta - \tau^2/4}$, con vectores propios complejos asociados $\underline{\Phi}$ y $\overline{\underline{\Phi}}$.
La solución general de (7) (para $n = 2$) es ahora

$$\underline{u}(t) = e^{\tau t/2}\mathrm{Re}\left(c\underline{\Phi}e^{i\Omega t}\right), \qquad (14)$$



(a) center



(b) spiral

FIG. 3: Retrato de fase de (a) centro, (b) punto espiral estable.

donde c es una constante arbritraria compleja.

Si los autovalores tienen partes reales negativas ($\tau < 0$), todas las trayectorias son **espirales** que tienden al origen cuando $t \to \infty$. El origen es un ***punto espiral asintóticamente estable*** (también llamado **foco estable**); véase la Figura 3.

Si los autovalores tienen parte real positiva ($\tau > 0$), todas las trayectorias escapan del origen cuando el tiempo crece (tienden hacia el origen cuando $t \to -\infty$) y el origen se dice que es un **foco inestable** o **punto espiral**.

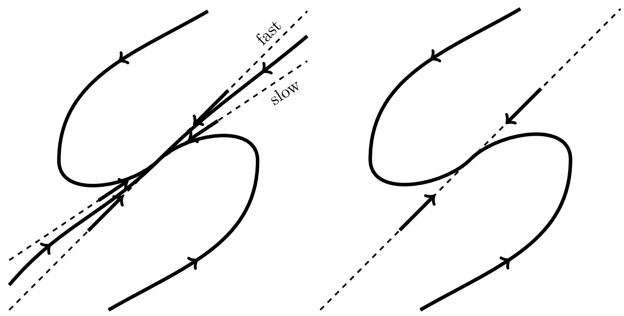
4. **Caso $\tau = 0$, $\Delta > 0$.**

Los autovalores son imaginarios puros, todas las trayectorias son cerradas (elipses o círculos) y el origen se dice que es un ***centro***, véase también la Figura 3.

Un centro es estable pero no es asintóticamente estable porque las trayectorias no tienden al centro cuando $t \to \infty$.

Si $c = \rho e^{i\alpha}$ y el vector propio es

$$\underline{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 \\ re^{i\theta} \end{pmatrix}, \tag{15}$$



(a) nodo (b) nodo degenerado

FIG. 4: Casos límite: nodo degenerado

la solución general (14) es

$$\underline{u}(t) = \rho \begin{pmatrix} \cos(\Omega t + \alpha) \\ r\cos(\Omega t + \alpha + \theta) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Un pequeño ejercicio de trigonometría muestra que las elipses correspondientes a (16) tienen por ecuación

$$\frac{u_1^2}{\rho^2} + \left(\frac{u_1 \cot\theta}{\rho} - \frac{u_2}{r\rho\sin\theta}\right)^2 = 1. \tag{17}$$

5. **Casos límite: $\tau^2 - 4\Delta = 0$.**

En estos casos, que están en el límite entre nodos y puntos espirales, el autovalor $\lambda = \tau/2$ tiene multiplicidad dos.

Hay dos posibilidades, o bien hay un solo autovector asociado al autovalor o hay dos vectores propios independientes.

Un ejemplo del primer caso es la matriz de coeficientes

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Hay una única autodirección en la que las trayectorias se aproximan a un **nodo degenerado estable** y las trayectorias tratan de rodear el punto fijo, pero son paralelas a la autodirección cuando $t \to \infty$ y cuando $t \to -\infty$. Véase la Figura 4.

La idea es que el nodo degenerado corresponde a un nodo en el que las autodirecciones rápida y lenta se aproximan una a la otra y acaban siendo la misma.

Podemos usar el método de los **coeficientes indeterminados** para hallar la solución: $\underline{u}(t) = (\underline{V}_1 + \underline{V}_2 t)e^{\tau t/2}$.

Insertando esto en (7), encontramos

$$\frac{\tau}{2}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 t)e^{\tau t/2} + \underline{V}_2 e^{\tau t/2} = \underline{\underline{A}}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 t)e^{\tau t/2},$$

a partir del cual

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{V}_2 = \frac{\tau}{2}\underline{V}_2, \quad \left(\underline{\underline{A}} - \frac{\tau}{2}\right)\underline{V}_1 = \underline{V}_2. \tag{18}$$

Entonces $\underline{V}_2$ es el vector propio correspondiente al autovalor doble $\lambda = \tau/2$ y $\underline{V}_1$ es un autovector generalizado correspondiente al mismo autovalor.

Otro método para determinar la otra solución independiente es usar la **fórmula de Abel**. Sea $\underline{u}_1 = \underline{V}_1 e^{\tau t/2}$ la solución correspondiente al autovalor doble $\tau/2$. Aplicando la fórmula de Abel, el Wronskiano con la otra solución independiente es $W(\underline{V}_1 e^{\tau t/2}, \underline{u}(t)) = e^{\tau t}$. Entonces $V_{11}u_2(t) - V_{12}u_1(t) = e^{\tau t/2}$ es una relación entre las componentes de $\underline{u}$. Asumamos que $V_{11} \neq 0$. Insertando $u_2(t) = [e^{\tau t/2} + V_{12}u_1(t)]/V_{11}$ en la EDO para $u_1(t)$, obtenemos una EDO de primer orden para u_1 que, una vez resuelta, da la otra solución independiente $\underline{u}$.

Ejemplo 1.

La matriz de los coeficientes en el sistema de EDOs siguiente tiene traza $\tau = 4$ y un autovalor doble $\lambda = 2$,

$$\underline{u}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \underline{u}.$$

Una solución es

$$\underline{u}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

De la fórmula de Abel se tiene

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & u \\ -e^{2t} & v \end{vmatrix} = e^{4t} \Longrightarrow u + v = e^{2t}.$$

La EDO de primer orden del sistema es $u' = u - v = 2u - e^{2t}$. Esto conduce a $(e^{-2t}u)' = -1$ y por lo tanto $u = -te^{2t}$, $v = (t+1)e^{2t}$ (hemos ignorado una constante arbitraria).
Las mismas soluciones se obtienen aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

La matriz diagonal

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

es un ejemplo del segundo caso. Cualquier dirección es una autodirección y se trata de un **nodo estrella**, en el que los puntos iniciales se aproximan al origen (o escapan de él) a lo largo de la línea recta que los une al origen.

6. Clasificación de los puntos fijos.

La Figura 5 muestra la clasificación de los puntos fijos en función de los valores de la traza y el determinante de la matriz de los coeficientes.
Hemos usado las fórmulas

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}\right), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \tau. \quad \lambda_1\lambda_2 = \Delta.$$

-Si $\Delta < 0$, un autovalor es positivo y otro negativo, el punto fijo es un **punto silla**.
-Si $\Delta > 0$, tenemos **nodos** para $\tau^2 - 4\Delta > 0$ (**estable** para $\tau < 0$, **inestable** para $\tau > 0$), **puntos espirales** para $\tau^2 - 4\Delta < 0$ y $\tau \neq 0$ (**estable** para $\tau < 0$, **inestable** para $\tau > 0$) y **centros** para $\tau = 0$.
Para $\tau^2 - 4\Delta = 0$, tenemos casos límites de **nodos degenerados** o **estrellas**.
-Si $\Delta = 0$, al menos uno de los autovalores es cero y esto significa que el correspondiente vector propio define una línea recta y todos sus puntos son puntos fijos. Esta es una **línea de puntos fijos no aislados**.

II. SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS. VARIACIÓN DE PARÁMETROS. COEFICIENTES INDETERMINADOS.

Cosideremos el sistema general de orden n

$$\frac{d\underline{u}}{dt} - \underline{\underline{A}}(t)\,\underline{u} = \underline{F}(t), \tag{19}$$

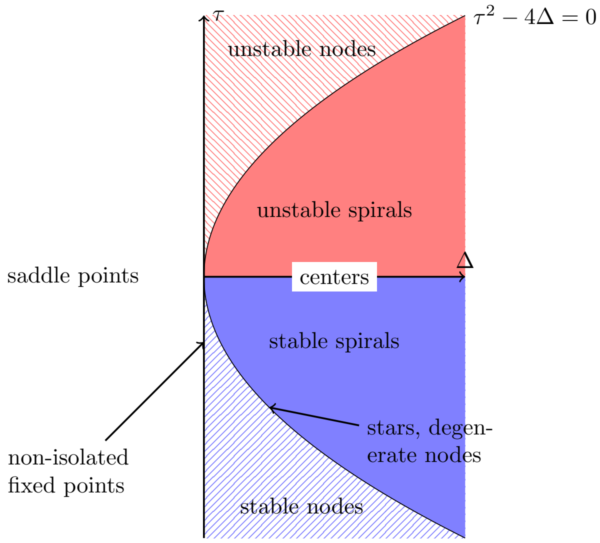


FIG. 5: Classification of fixed points depending on the values of τ and Δ.

donde $\underline{F}$ y $\underline{u}$ son vectores columna de dimensión n y la matriz de coeficientes depende del tiempo.

Supongamos conocidas n soluciones linealmente independientes $\underline{\psi}_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ del sistema homogéneo con $\underline{F}(t) = 0$.

Entonces la solución por **variación de parámetros** es

$$\underline{u}(t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(t)\underline{\psi}_j(t) \equiv (\underline{\psi}_1(t), \ldots, \underline{\psi}_n(t)) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \ldots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \equiv \underline{\underline{\psi}}(t)\underline{y}(t). \tag{20}$$

Sustituyendo (20) en (19), encontramos

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{dy_j}{dt}\underline{\psi}_j(t) = \underline{F}(t). \tag{21}$$

Esta ecuación se puede escribir en forma matricial como

$$\underline{\underline{\psi}}\frac{d}{dt}\underline{y} = \underline{F}(t). \tag{22}$$

Dado que las funciones $\underline{\psi}_j(t)$ son independientes, $\det(\underline{\underline{\psi}}) \neq 0$, y existe la matriz inversa $\underline{\underline{\psi}}^{-1}$. Entonces (22) da

$$\underline{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{\psi}}^{-1}(s)\underline{F}(s)ds, \tag{23}$$

$$\underline{u}(t) = \underline{\underline{\psi}}(t) \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{\psi}}^{-1}(s)\underline{F}(s)ds. \tag{24}$$

¿Es única esta solución?

Las funciones $\underline{\psi}_j(t)$ forman un conjunto de soluciones independientes del problema homogéneo. Cualquier otro conjunto de soluciones independientes, $\underline{\Psi}_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$ estará relacionado mediante $\underline{\underline{\Psi}}(t) = \underline{\underline{\psi}}(t)\,\underline{\underline{C}}$, donde $\underline{\underline{C}}$ es una matriz invertible con coeficientes constantes.

Entonces en (23), $\underline{\underline{\Psi}}(t)\underline{\underline{\Psi}}^{-1}(s) = \underline{\underline{\psi}}(t)\underline{\underline{CC}}^{-1}\underline{\underline{\psi}}(s) = \underline{\underline{\psi}}(t)\underline{\underline{\psi}}(s)$, y (23) con $\underline{\underline{\Psi}}$ en lugar de $\underline{\underline{\psi}}$ produce la misma fórmula.

Ejemplo 2.

Sea

$$\underline{F}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{with } \tau = -3, \quad \Delta = -4. \tag{25}$$

Los autovalores de $\underline{\underline{A}}$ son $(-3 \pm 5)/2$, esto es, 1 y -4.

El vector propio correspondiente a $\lambda_1 = -4$ es $\underline{\Phi}_1 = (2, -3)$ y el correspondiente a $\lambda_2 = 1$ es $\underline{\Phi}_2 = (1, 1)$.

La solución matricial es

$$\underline{\underline{\psi}}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-4t} & e^t \\ -3e^{-4t} & e^t \end{pmatrix}, \quad \text{y su inversa es} \quad \underline{\underline{\psi}}^{-1}(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} e^{4t} & -e^{4t} \\ 3e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Para $\underline{F}(t)$ definido en (25), encontramos

$$\frac{d\underline{y}}{dt} = \underline{\underline{\psi}}^{-1}\underline{F} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{y} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} (e^{5t} - 1)/5 \\ 3t \end{pmatrix}, \tag{27}$$

que satisface $\underline{y}(0) = \underline{0}$ y da la solución particular

$$\underline{u}(t) = \underline{\underline{\psi}}\,\underline{y} = \frac{e^t}{5}\begin{pmatrix} \frac{2}{5}(1 - e^{-5t}) + 3t \\ -\frac{3}{5}(1 - e^{-5t}) + 3t \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Podemos comprobar la **solución particular** obtenida con el **método de los coeficientes indeterminados**.
Dado que una de las soluciones del sistema homogéneo es proporcional a e^t, insertamos

$$\underline{u}(t) = (\underline{b} + \underline{c}t)e^t, \tag{29}$$

en (19) obteniendo

$$\underline{b} + \underline{c} + \underline{c}t = \underline{\underline{A}}(\underline{b} + \underline{c}t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\underline{c}$ es un vector propio correspondiente al autovalor 1 por tanto

$$\underline{c} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{I}})\underline{b} = \underline{c} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

La última ecuación da

$$2(c_2 - c_1) = \mu - 1, \quad -3(c_2 - c_1) = \mu \Longrightarrow -\frac{2}{3} = \frac{\mu - 1}{\mu} \Longrightarrow \mu = \frac{3}{5}, \tag{31}$$

y $c_1 - c_2 = 1/5$.
Entonces (29) se convierte en

$$\underline{u}(t) = e^t \begin{pmatrix} \frac{3t}{5} + c_2 + \frac{1}{5} \\ \frac{3t}{5} + c_2 \end{pmatrix},$$

y la solución general del sistema es

$$\underline{u}(t) = e^t \begin{pmatrix} \frac{3t}{5} + \frac{1}{5} \\ \frac{3t}{5} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 2e^{-4t} \\ -3e^{-4t} \end{pmatrix}, \text{ con } c_2,\ k_1 \text{ constantes arbitrarias.} \tag{32}$$

Para $c_2 = -3/25$ y $k_1 = -1/25$, en la ecuación (32) se obtiene (28).

III. MATERIAL SUPLEMENTARIO: REDUCCIÓN A MODOS NORMALES

Un sistema lineal con una matriz de coeficientes constante $\underline{\underline{A}}$ puede ser reducida a un sistema de n EDOs lineales de primer orden independientes con tal que la matriz $\underline{\underline{A}}$ sea diagonalizable, $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{R}}$, donde $\underline{\underline{D}}$ es una matriz diagonal con términos no nulos $d_1, \ldots, d_n$.
En este caso, el **cambio de variable** $\underline{u} = \underline{\underline{R}}\,\underline{v}$ da lugar a

$$\frac{d}{dt}\underline{u}(t) = \underline{\underline{R}}\frac{d}{dt}\underline{v} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{v} + \underline{F}(t) \Longrightarrow \frac{d}{dt}\underline{v} = \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{v} + \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{F}(t) = \underline{\underline{D}}\,\underline{v} + \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{F}(t),$$

esto es

$$\frac{d}{dt}\underline{v}(t) = \underline{\underline{D}}\,\underline{v} + \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{F}(t), \quad \frac{dv_i}{dt} = d_i v_i + \sum_{j=1}^{n} (\underline{\underline{R}}^{-1})_{ij} F_j(t), \tag{33}$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Las soluciones son

$$v_i(t) \;=\; c_i e^{d_i t} + \sum_{j=1}^{n} (\underline{\underline{R}}^{-1})_{ij} \int_0^t e^{d_i(t-s)} F_j(s)\, ds, \tag{34}$$

$$u_i(t) \;=\; \sum_{k=1}^{n} (\underline{\underline{R}})_{ik} c_k e^{d_k t} + \sum_{j,k=1}^{n} (\underline{\underline{R}})_{ik} (\underline{\underline{R}}^{-1})_{kj} \int_0^t e^{d_k(t-s)} F_j(s)\, ds. \tag{35}$$

Ejemplo 3.

Resolvamos el Ejemplo 2 por **reducción a los modos normales**.

Las matrices de transformación son $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{\psi}}(0)$ y $\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{\psi}}^{-1}(0)$, y los componentes de la diagonal de la matriz $\underline{\underline{D}}$ son los autovalores de la matriz $\underline{\underline{A}}$, $d_1 = -4$, $d_2 = 1$.

Las componentes del $\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{F}(t)$ son $\frac{1}{5}e^t$ y $\frac{3}{5}e^t$.

Entonces (33) da las ecuaciones de los **modos normales**

$$\frac{dv_1}{dt} = -4v_1 + \frac{1}{5}e^t, \quad \frac{dv_2}{dt} = v_2 + \frac{3}{5}e^t.$$

Resolviendo estas ecuaciones, encontramos los modos normales

$$v_1 = e^{-4t}c_1 + \frac{1}{25}e^t, \quad \frac{dv_2}{dt} = \left(c_2 + \frac{3t}{5}\right)e^t,$$

dando

$$u_1 = 2e^{-4t}c_1 + e^t c_2 + \frac{e^t}{5}\left(\frac{2}{5} + 3t\right), \quad u_2 = -3c_1 e^{-4t} + \left(c_2 + \frac{3t}{5} - \frac{3}{25}\right)e^t. \tag{36}$$

Con $c_1 = -\frac{1}{25}$, $c_2 = 0$, la ecuación (36) da lugar a (28).

[1] W.E. Boyce and R.C. Di Prima, Elementary differential equations and boundary value problems. 9th ed. John Wiley & Sons, N.Y. 2009. Chapter 7.

[2] G. F. Simmons, Differential equations with applications and historical notes. 2nd ed. MacGraw Hill, N.Y. 1991. Chapter 7.