Cálculo Diferencial Aplicado
Tema 3: Sistemas de ecuaciones diferenciales

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin, Rocío Vega

Grado en Ingeniería Informática y
Doble GradoGrado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas.

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Descripción

- Sistemas de EDOs de primer orden.
- Sistemas lineales homogéneos autónomos bidimensionales.
- Sistemas lineales no homogéneos.

- Existencia, unicidad, extensión y continuidad: $f(t,x)$, $\partial f/\partial x_j$, continua en un dominio B en el espacio con dimensión $n+1$ y $(t_0, x^0) \in B$. Entonces el PVI:

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x^0,$$

  tiene una única solución $x(t)$ en algún intervalo del tiempo t conteniendo a t_0. Podemos extender la solución a cualquier intervalo que contenga a t_0 para el cual la curva solución esté contenida en B y se extienda hasta la frontera de B cuando t tiende a los extremos del intervalo. La solución es continua respecto a los datos x^0 y f.
- Sistemas autónomos: $f(x)$, $\partial f/\partial x_j$, continuos en un dominio S en un espacio espacio de fase n-dimensional y $(x^0) \in S$. Entonces el PVI:

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x^0,$$

  tiene una única solución $x(t)$ en algún intervalo de tiempo t conteniendo a t_0. Podemos extender la solución a cualquier intervalo conteniendo a t_0 para el cual la curva solución caiga en S. La solución es continua respecto a los datos x^0 y f.

Sistemas lineales

Supongamos que $a_{mn}(t)$, $F_n(t)$ son funciones continuas en $|t - t_0| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= a_{11}(t)u_1 + \ldots + a_{1n}(t)u_n + F_1(t), \\ &\ldots \\ \frac{du_n}{dt} &= a_{n1}(t)u_1 + \ldots + a_{nn}(t)u_n + F_n(t), \end{aligned}$$

PVI con $\underline{u}(t_0) = \underline{u}_0$ tiene una única solución. Equivalentemente, como EDO vectorialas a vector ODE:

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{\underline{A}}(t)\,\underline{u} + \underline{F}(t),$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ & \ldots & \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{F}(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ \ldots \\ F_n(t) \end{pmatrix}.$$

Fórmula de Abel. Sistemas lineales homogéneos autónomos.

Wronskiano:

$$W(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n) = \det(\underline{\underline{\Phi}}), \quad \underline{\underline{\Phi}}(t) = (\underline{u}_1(t), \dots, \underline{u}_n(t)),$$

$\underline{\underline{\Phi}}(t)$ matriz fundamental de soluciones independientes. fórmula de Abel:

$$\frac{d}{dt} W(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n) = \mathrm{Tr}\underline{\underline{A}}(t)\, W(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n).$$

Sistemas lineales homogéneos autónomos: $\underline{\dot{u}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{u}(t)$.

Tomando $\underline{u}(t) = \underline{U}e^{\lambda t}$, se obtiene un problema de autovalores:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{U} = \lambda \underline{U}.$$

Si todos los autovalores λ_j son diferentes,

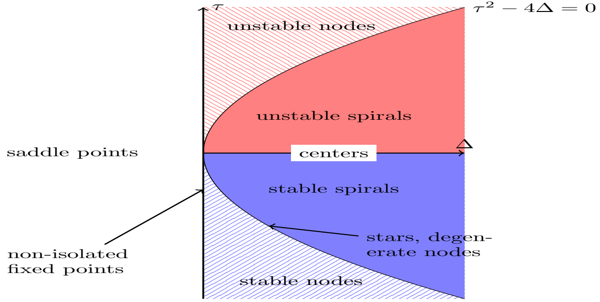
$$\underline{u}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} \underline{\Phi}_j, \quad \underline{\Phi}_j \text{ son vectores propios, } c_j \text{ son constantes.}$$

Sistemas bidimensionales

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{con } \tau = \mathrm{Tr}\underline{\underline{A}} = a + d, \quad \Delta = \det \underline{\underline{A}} = ad - bc.$$

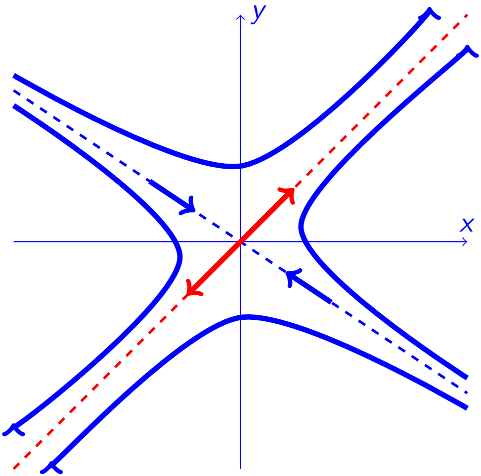
Ecuación característica para los autovalores ($\lambda_1 + \lambda_2 = \tau$, $\lambda_1 \lambda_2 = \Delta$)

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0 \Longrightarrow \lambda_j = \frac{\tau + (-1)^j \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad j = 1, 2.$$



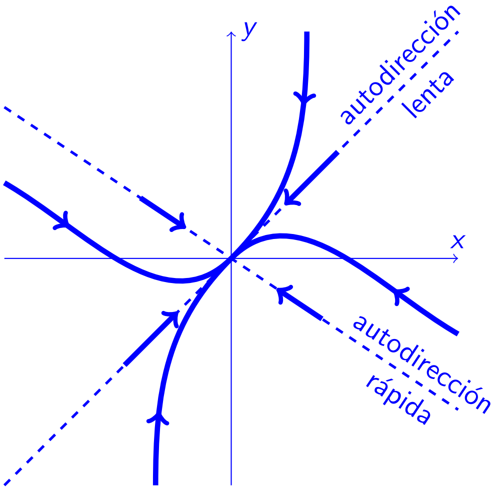
Punto de silla

$\Delta < 0 \Longrightarrow \lambda_1 < 0 < \lambda_2$



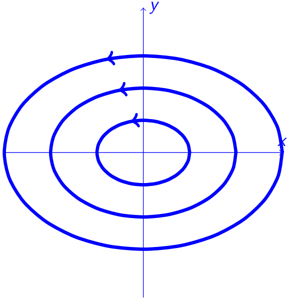
Nodo asintóticamente estable

$\tau < 0$, $\Delta > 0$, $\tau^2 - 4\Delta > 0 \Longrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

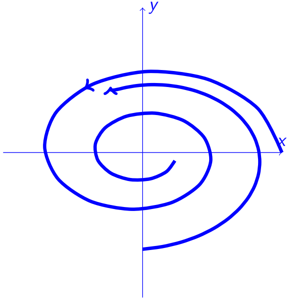


Centros o puntos espiral asintóticamente estables

$\tau \leq 0$, $\Delta > 0$, $\tau^2 - 4\Delta = -4\Omega^2 < 0 \Longrightarrow \lambda_j = \frac{\tau}{2} \pm i\Omega$.



(a) centro

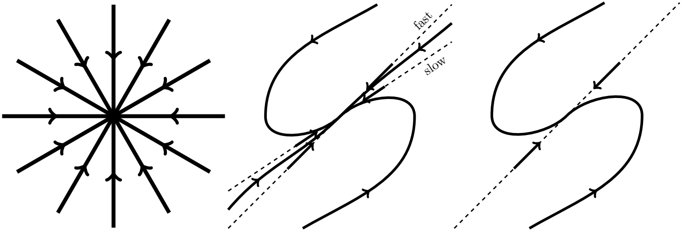


(b) espiral

Casos límite

$\tau^2 - 4\Delta = 0.$

- $\underline{\underline{A}} = \frac{\tau}{2}\underline{\underline{I}}$, punto estrella: todas las direcciones son autodirecciones;
- en otro caso nodo degenerado: una autodirección.



(a) estrella (b) nodo (c) nodo degenerado

Variación de parámetros $\dot{\underline{u}} = \underline{\underline{A}}(t)\underline{u} + \underline{F}(t)$

Matriz fundamental $\underline{\underline{\Psi}}(t) = (\underline{\psi}_1(t), \ldots, \underline{\psi}_n(t))$, tal que, $\dot{\underline{\underline{\Psi}}}(t) = \underline{\underline{A}}(t)\,\underline{\underline{\Psi}}(t)$. Entonces insertamos la solución del sistema homogéneo,

$$\underline{u}(t) = \sum_{j=1}^{n} y_j \underline{\psi}_j(t) = \underline{\underline{\Psi}}(t)\underline{y}$$

con $y_j = y_j(t)$ en el sistema no homogéneo:

$$\underline{\underline{\Psi}}(t)\dot{\underline{y}}(t) + \cancel{\dot{\underline{\underline{\Psi}}}(t)\underline{y}(t)} - \cancel{\underline{\underline{A}}(t)\underline{\underline{\Psi}}(t)\underline{y}(t)} = \underline{F}(t) \Longrightarrow \dot{\underline{y}}(t) = \underline{\underline{\Psi}}^{-1}(t)\underline{F}(t).$$

Integrando y sustituyendo en $\underline{u}(t)$, encontramos la solución del PVI $\dot{\underline{u}}(t) - \underline{\underline{A}}(t)\underline{u}(t) = \underline{F}(t)$, $\underline{u}(0) = \underline{u}_0$:

$$\underline{u}(t) = \underline{\underline{\Psi}}(t)\int_0^t \underline{\underline{\Psi}}^{-1}(s)\underline{F}(s)ds + \underline{\underline{\Psi}}(t)\underline{u}_0.$$

Ejemplo: $\underline{\dot{u}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{u} + \underline{F}$

$$\underline{F}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \tau = -3, \quad \Delta = -4. \tag{1}$$

Autovalores de $\underline{\underline{A}}$ son $\lambda_1 = -4$, con autovector $\underline{\psi}_1 = (2, -3)$ y $\lambda_2 = 1$ con $\underline{\psi}_2 = (1, 1)$. La matriz fundamental es

$$\underline{\underline{\Psi}}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-4t} & e^t \\ -3e^{-4t} & e^t \end{pmatrix}, \text{ y su inversa es } \underline{\underline{\Psi}}^{-1}(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{4t} & -e^{4t} \\ 3e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \quad ($$

Para $\underline{F}(t)$ definida en (1), tenemos

$$\frac{d\underline{y}}{dt} = \underline{\underline{\Psi}}^{-1}\underline{F} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{y} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (e^{5t} - 1)/5 \\ 3t \end{pmatrix}, \tag{3}$$

que satisface $\underline{y}(0) = \underline{0}$ y da la solución particular

$$\underline{u}(t) = \underline{\underline{\Psi}}\,\underline{y} = \frac{e^t}{5} \begin{pmatrix} \frac{2}{5}(1 - e^{-5t}) + 3t \\ -\frac{3}{5}(1 - e^{-5t}) + 3t \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Método de coeficientes indeterminados aplicado al ejemplo

Usamos $\underline{u}(t) = (\underline{b} + \underline{c}t)e^t$, porque $\lambda_2 = 1$. Obtenemos

$$(\underline{b} + \underline{c} + \underline{c}t)\cancel{e^t} = \underline{\underline{A}}(\underline{b} + \underline{c}t)\cancel{e^t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cancel{e^t}.$$

Así, $\underline{\underline{A}}\underline{c} = \underline{c}$ (por tanto $\underline{c} = \mu\underline{\psi}_1$ es el vector propio correspondiente a $\lambda_2 = 1$), y

$$\underline{c} = \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{I}})\underline{b} = \underline{c} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La última ecuación da $2(c_2 - c_1) = \mu - 1$, $-3(c_2 - c_1) = \mu$. Entonces $-\frac{2}{3} = \frac{\mu-1}{\mu} \Longrightarrow \mu = \frac{3}{5}$ y $c_1 - c_2 = 1/5$. Por tanto

$$\underline{u}(t) = e^t\begin{pmatrix} \frac{3t}{5} + c_2 + \frac{1}{5} \\ \frac{3t}{5} + c_2 \end{pmatrix}, \text{y la solución general del sistema es}$$

$$\underline{u}(t) = e^t\begin{pmatrix} \frac{3t}{5} + \frac{1}{5} \\ \frac{3t}{5} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix} 2e^{-4t} \\ -3e^{-4t} \end{pmatrix}, \ c_2,\ k_1 \text{ son constantes.}$$

Material suplementario: Reducción a modos normales

Sea $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{R}}$, donde $\underline{\underline{D}}$ es una matriz diagonal con valores $d_1, \ldots, d_n$. $\underline{u} = \underline{\underline{R}}\,\underline{v}$ da

$$\dot{\underline{u}} = \underline{\underline{R}}\dot{\underline{v}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{v} + \underline{F}(t) \Longrightarrow \dot{\underline{v}} = \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{v} + \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{F}(t) = \underline{\underline{D}}\,\underline{v} + \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{F}(t),$$

esto es

$$\dot{\underline{v}}(t) = \underline{\underline{D}}\,\underline{v} + \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{F}(t), \quad \dot{v}_i = d_i v_i + \sum_{j=1}^{n} (\underline{\underline{R}}^{-1})_{ij} F_j(t),$$

para $i = 1, \ldots, n$. Las soluciones son

$$v_i(t) = c_i e^{d_i t} + \sum_{j=1}^{n} (\underline{\underline{R}}^{-1})_{ij} \int_0^t e^{d_i(t-s)} F_j(s)\, ds, \tag{5}$$

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^{n} (\underline{\underline{R}})_{ik} c_k e^{d_k t} + \sum_{j,k=1}^{n} (\underline{\underline{R}})_{ik} (\underline{\underline{R}}^{-1})_{kj} \int_0^t e^{d_k(t-s)} F_j(s)\, ds. \tag{6}$$

Material suplementario: Reducción a modos normales del ejemplo

Matrices de transformación: $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{\Psi}}(0)$ y $\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{\Psi}}^{-1}(0)$, los componentes de la diagonal de $\underline{\underline{D}}$ son $d_1 = -4$, $d_2 = 1$. Las componentes del vector $\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{F}(t)$ son $\frac{1}{5}e^t$ y $\frac{3}{5}e^t$. Entonces las ecuaciones de los modos normales son

$$\frac{dv_1}{dt} = -4v_1 + \frac{1}{5}e^t, \quad \frac{dv_2}{dt} = v_2 + \frac{3}{5}e^t.$$

Resolviendo estas ecuaciones, encontramos los modos normales

$$v_1 = e^{-4t}c_1 + \frac{1}{25}e^t, \quad v_2 = \left(c_2 + \frac{3t}{5}\right)e^t, \quad \text{por tanto}$$

$$u_1 = 2e^{-4t}c_1 + e^t c_2 + \frac{e^t}{5}\left(\frac{2}{5} + 3t\right),\ u_2 = -3c_1e^{-4t} + \left(c_2 + \frac{3t}{5} - \frac{3}{25}\right)e^t.$$

Para $c_1 = -\frac{1}{25}$, $c_2 = 0$, se obtiene la solución del ejemplo (4).