CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO
TEMA 1: Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' + y = 2e^{-x} + x^2$$

Cuestión 2 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2 - 1\,,\ \ x > 0$$

Cuestión 3 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' + y\cos x = \sin x \cos x$$

Cuestión 4 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = x^2/y$$

Cuestión 5 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$$

Cuestión 6 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' + y^2 \sin x = 0$$

Cuestión 7 Resolver el problema de valor inicial (PVI):

$$\text{(PVI)} \begin{cases} (1-x)(1-y)y' = \alpha \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Cuestión 8 Resolver la ecuación diferencial:

$$x^3 + xy^2 + (x^2 y + y^3)y' = 0$$

Cuestión 9 Resolver la ecuación diferencial:

$$e^y + \big(xe^y + 2y\big)y' = 0$$

Cuestión 10 Resolver la ecuación diferencial:

$$y^2 e^{xy} + \cos x + \big(e^{xy} + xye^{xy}\big)y' = 0$$

Cuestión 11 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = (2x+y)/(x-y)$$

Cuestión 12 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = (x^2 + 3y^2)/2xy$$

Cuestión 13 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = (y + \sqrt{x^2 - y^2})/x$$

Cuestión 14 Resolver la ecuación diferencial: Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$-5x^4 + 2y + xy' = 0 \quad \text{con} \quad x > 0;$$

Se pide:

i) Clasificar, razonadamente, la EDO.

ii) Resolver la ecuación sabiendo que $y(1) = 2$.

iii) Comprobar el resultado obtenido en el apartado anterior.

Cuestión 15 Resolver el siguiente problema de valores iniciales, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$(PVI) \begin{cases} y' - \dfrac{\alpha x^2}{y(1+x^3)} = 0\,, \quad x \in [0, +\infty) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Cuestión 16 Sea el problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} 2ty + (t^2 + y)y' = 0 \\ y(0) = -2 \end{cases} \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

Se pide:

1. Clasificar la ecuación diferencial y demostrar que la solución del PVI es: $y(t) = -t^2 - \sqrt{t^4 + 4}$
2. Expresar la ecuación diferencial de i) en la forma $y' = f(t, y)$ y considerar el esquema numérico:

   $$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, \tilde{Y}_{n+1}) + f(t_n, Y_n))\,, \quad \text{con} \quad \tilde{Y}_{n+1} = Y_n + hf(t_n, Y_n)\,.$$

   Demostrar que $Y_1 = \dfrac{4}{h^2 - 2}$ para cualquier paso h. Además, encontrar el valor aproximado a $y(1)$ utilizando un paso $h_1 = 0.5$.
3. Estimar el orden del método numérico sabiendo que la aproximación a $y(1)$ es $Y_{10}^{h_2} = -3.239$ donde se ha utilizado un paso $h_2 = 0.1$.

Cuestión 17 Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' + ky = k\sin t + \cos t \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad , \quad t \geq 0\,,$$

donde k es un parámetro real positivo.

(a) Clasificar la ecuación diferencial del PVI y hallar su solución.

(b) Tomando $k = 3$ en el PVI, hallar el valor aproximado de $y(\pi/4)$ mediante el método de Euler explícito con paso $h = \pi/4$. Comparar el resultado con el obtenido usando la solución exacta $y(t) = \sin t + e^{-3t}$

(c) ¿Es admisible la aproximación obtenida en el apartado (b) con el paso $h = \pi/4$? En caso afirmativo, justificar la respuesta. En caso negativo, obtener una cota superior del paso h que aproxime $y(\pi/4)$ de manera admisible.

Cuestión 18 Hallar la solución del siguiente problema de valor inicial y escribir dicha solución de forma explícita:

$$\begin{cases} (1 - \ln x)y' = 1 + \ln x + \dfrac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad , \quad 0 < x < e.$$

Cuestión 19 Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' + y \;=\; 2\,t^2 \\ y(0) \;=\; 5\,. \end{cases}$$

(i) Comprobar que $y(t) \;=\; e^{-t} + 2\,t^2 - 4\,t + 4$ es la solución exacta del PVI.

(ii) Usar el siguiente método de Runge–Kutta

$$Y_{n+1} \;=\; Y_n + \frac{1}{2}\,(\,K_1 \,+\, K_2\,)\,, \quad \text{con} \quad K_1 \;=\; h\,f(t_n, Y_n)\,,\;\; K_2 \;=\; h\,f(t_{n+1}, Y_n + K_1)\,,$$

y con $n = 0, 1, 2, \ldots$, para aproximar el valor $y(0.2)$ con paso $h = h_1 = 0.1$.

(iii) Sabiendo que $Y_{20}^{h_2} = 4.09875$ es una aproximación de $y(0.2)$ calculada con paso $h = h_2 = 0.01$, estimar el orden del método numérico descrito en el apartado (ii).

Cuestión 20 Dada la ecuación diferencial $xy^2y' + x^3 \;=\; y^3$, con $0 < x < 2$, se pide:

(a) Clasificarla razonadamente.

(b) Resolverla sujeta a la condición $y(1) = 2$.

Cuestión 21 Se considere el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + 6\,y \;=\; 0 \\ y(0) \;=\; 1\,. \end{cases}$$

(i) Aplicar una iteración del método de Euler explicito con paso $h_1 = 0.05$. Además analizar si el método es estable con el paso sugerido.

(ii) Usar el valor Y_1 calculado en (i) y el siguiente método de Adams–Moulton de orden 2

$$Y_{n+2} \;=\; Y_{n+1} + \frac{h}{2}\Big[\; f(t_{n+1}, Y_{n+1}) \;+\; f(t_{n+2}, Y_{n+2})\;\Big]\,,$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$, para aproximar el valor $y(0.1)$ usando $h = h_1 = 0.05$.

(iii) Sabiendo que $E^{h_2}_{t=0.1} = 0.00112$ es el error cometido al aproximar $y(0.1)$ mediante el método en (ii) con paso $h_2 = h_1/q$, calcular el valor de h_2 (notar que $y(0.1) = 0.54881$ y $q \in \mathbb{N}$ es el factor de reducción del paso).

Cuestión 22 Dada la ecuación diferencial

$$3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2 + y^2)y' = 0\,,$$

se pide:

i) Probar que la ecuación diferencial no es exacta.

ii) Comprobar que la ecuación se convierte en exacta si se multiplica por el factor e^{3x}.

iii) Hallar la solución sabiendo que $y(1) = 2$.

Cuestión 23 Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y + e^y y' = k - x(1 + y')\,; \qquad x > 0\,; \qquad k \in \mathbb{R}$$

Se pide:
a) Clasificarla razonadamente.
b) Hallar su solución general.
c) En función de k hallar todas las soluciones particulares que cumplen $y(1) = 1$.
d) Escribir la solución del apartado c) que se obtiene para $k = 1$.

Cuestión 24 a) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{x}{y}y' = 1 + \ln x - \ln y$$

b) Calcular la solución que cumple la condición: $y(1) = 2$.

Cuestión 25 Dada la siguiente ecuación diferencial

$$(x+y)^2 + (2xy + x^2 - 1)y' = 0\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

iii) Escribir la solución que satisface $y(3) = 1$.

Cuestión 26 Dada la siguiente ecuación diferencial

$$3x^2 - 2xy + (6y^2 - x^2 + 3)y' = 0\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

iii) Escribir la solución que satisface $y(0) = 1$.

Cuestión 27 Dada la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + xy + y^2}{x^2}\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

iii) Escribir la solución que satisface $y(1) = 2$.

Cuestión 28 Dada la siguiente ecuación diferencial

$$6\,x + y\,\cos(x) + (e^y + \sin(x))\,y' = 0\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar su solución general.

iii) Comprobar dicha solución.
