uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO
TEMA 1: Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' + y = 2e^{-x} + x^2$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de primer orden lineal. Su solución es:

$$y(x) = (c + 2x)e^{-x} + x^2 - 2x + 2\,; \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 2 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2 - 1\,,\ x > 0$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de primer orden lineal. Su solución es:

$$y(x) = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4} - \frac{x}{2}\,; \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 3 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' + y\cos x = \sin x \cos x$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de primer orden lineal. Su solución es:

$$y(x) = ce^{-\sin x} + \sin x - 1\,; \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 4 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = x^2/y$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de primer orden de variables separables. Su solución implícita es:

$$y^2(x) = \frac{2x^3}{3} + c\,; \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 5 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de primer orden de variables separables. Su solución implícita es:

$$y^2(x) = \frac{2}{3}\ln(1+x^3) + c\,; \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 6 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' + y^2 \sin x = 0$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de primer orden de variables separables. Su solución explícita es:

$$y(x) = \frac{1}{c - \cos x}\,; \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 7 Resolver el problema de valor inicial (PVI):

$$(\text{PVI}) \begin{cases} (1-x)(1-y)y' = \alpha \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

SOLUCIÓN:
La ecuación diferencial es de variables separables. Aplicando la condición inicial se obtiene la solución implıcita del PVI:

$$y(x) - \frac{y^2(x)}{2} + \alpha \ln|1-x| = 0\,.$$

Cuestión 8 Resolver la ecuación diferencial:

$$x^3 + xy^2 + (x^2y + y^3)y' = 0$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de primer orden exacta. Su solución implícita es:

$$x^4 + y^4(x) + 2x^2y^2(x) = c\,; \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 9 Resolver la ecuación diferencial:

$$e^y + \big(xe^y + 2y\big)y' = 0$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de primer orden exacta. Su solución implícita es:

$$x^4 + y^4(x) + 2x^2y^2(x) = c\,; \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 10 Resolver la ecuación diferencial:

$$y^2e^{xy} + \cos x + \big(e^{xy} + xye^{xy}\big)y' = 0$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de primer orden exacta. Su solución implícita es:

$$xe^{y(x)} + y^2(x) = c\,; \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 11 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = (2x + y)/(x - y)$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de primer orden homogénea. Su solución implícita es:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}y(x)}{2x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(2 + \frac{y^2(x)}{x^2}\right) = \ln|x| + c\,; \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 12 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = (x^2 + 3y^2)/2xy$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de primer orden homogénea. Su solución implícita es:

$$1 + \frac{y^2(x)}{x^2} = c\,|x|\,; \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 13 Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = (y + \sqrt{x^2 - y^2})/x$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de primer orden homogénea. Su solución explícita es:

$$y(x) = x \, \sin(\ln|x| + c)\,; \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 14 Resolver la ecuación diferencial: Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$-5x^4 + 2y + xy' = 0 \quad \text{con} \quad x > 0;$$

Se pide:

i) Clasificar, razonadamente, la EDO.

ii) Resolver la ecuación sabiendo que $y(1) = 2$.

iii) Comprobar el resultado obtenido en el apartado anterior.

SOLUCIÓN:

1. Dado que $x \neq 0$, despejamos y',

$$-5x^4 + 2y + xy' = 0 \Rightarrow y' + \frac{2y}{x} = 5x^3$$

La ecuación diferencial es de primer orden lineal y se puede resolver usando un factor integrante.

2. Factor integrante: $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$.
Multiplicando la ecuación por $\mu(x) = x^2$, se obtiene $x^2 y' + 2xy = 5x^5 \Rightarrow (x^2 y)' = 5x^5$, integrando y despejando y:

$$y(x) = \frac{1}{x^2} \int x^2 \, 5x^3 \, dx = 5x^4/6 + C/x^2$$

Como $y(1) = 2$, entonces $C = 7/6$. Finalmente

$$y(x) = \frac{5x^4}{6} + \frac{7}{6x^2}$$

3. Comprobamos la solución obtenida en ii)

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{3x^3} \\ \frac{2y}{x} &= \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{3x^3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y' + \frac{2y}{x} = 5x^3 \quad \text{OK} .$$

Cuestión 15 Resolver el siguiente problema de valores iniciales, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$(PVI)\begin{cases} y' - \dfrac{\alpha x^2}{y(1+x^3)} = 0\,, & x \in [0,+\infty) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

La EDO es separable $\Rightarrow ydy = \dfrac{\alpha x^2}{1+x^3}dx$.

Integrando obtenemos $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{\alpha}{3}\ln(1+x^3) + C$.

Sustituyendo el dato inicial, $y(0) = 0$, se obtiene $C = 0$.

Obtenemos la solución

$$y(x) = \sqrt{\frac{2\alpha}{3}\ln(1+x^3)}$$

Cuestión 16 Sea el problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} 2ty + (t^2+y)y' = 0 \\ y(0) = -2 \end{cases} \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

Se pide:

1. Clasificar la ecuación diferencial y demostrar que la solución del PVI es: $y(t) = -t^2 - \sqrt{t^4+4}$
2. Expresar la ecuación diferencial de i) en la forma $y' = f(t,y)$ y considerar el esquema numérico:

   $$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, \tilde{Y}_{n+1}) + f(t_n, Y_n))\,, \quad \text{con} \quad \tilde{Y}_{n+1} = Y_n + hf(t_n, Y_n)\,.$$

   Demostrar que $Y_1 = \dfrac{4}{h^2-2}$ para cualquier paso h. Además, encontrar el valor aproximado a $y(1)$ utilizando un paso $h_1 = 0.5$.
3. Estimar el orden del método numérico sabiendo que la aproximación a $y(1)$ es $Y_{10}^{h_2} = -3.239$ donde se ha utilizado un paso $h_2 = 0.1$.

SOLUCIÓN:

i) Se trata de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden no lineal **exacta**, ya que la EDO puede expresarse en la forma $M(t,y)+N(t,y)y'=0$, donde $M(t,y)=2ty$, $N(t,y)=t^2+y$ y además se verifica $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2t=\dfrac{\partial N}{\partial t}$.
Por otro lado, dado que el enunciado nos proporciona la solución del PVI, podemos seguir alguno de los siguientes caminos:

UNO.- Comprobamos directamente que, en efecto, la solución aportada satisface las condiciones del PVI.

DOS.- Obtenemos la solución tal como sigue:
Dado que la EDO es exacta, existe una función $F=F(t,y)$ tal que $\dfrac{\partial F}{\partial t}=2ty$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=t^2+y$, donde $\dfrac{dF}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=0$.
Obtenemos la función F integrando $\dfrac{\partial F}{\partial t}$, esto es

$$F=\int (2ty)\,dt = t^2y+\phi(y)\,.$$

Para hallar la función $\phi(y)$ derivamos el resultado anterior respecto de y y lo igualamos a $\dfrac{\partial F}{\partial y}=t^2+y$, con lo que obtenemos la ecuación diferencial $\phi'(y)=y$ y así $\phi(y)=\dfrac{y^2}{2}+C_1$.
Por lo tanto $F=\dfrac{y^2}{2}+t^2y+C_1$ y de $\dfrac{dF}{dt}=0$ se llega a que

$$\frac{y^2}{2}+t^2y=C \Longrightarrow \frac{(y(0))^2}{2}+0^2y(0)=C \Longrightarrow C=2\,,$$

donde hemos tenido en cuenta que $y(0)=-2$.
Finalmente se concluye que $\boxed{y(t)=-t^2-\sqrt{t^4+4}}$

ii) Siguiendo las indicaciones del enunciado,

$$y'=f(t,y)=-\frac{2ty}{t^2+y} \quad \text{y además} \quad y(t_0=0)=-2=y_0=Y_0$$

Para demostrar que $Y_1=\dfrac{4}{h^2-2}$, calculamos primero $\tilde{Y}_1$ con lo que $\tilde{Y}_1=Y_0+hf(t_0,Y_0)=-2$.
Sustituyendo en el esquema numérico $f(t_1,\tilde{Y}_1)=f(h,-2)=\dfrac{4h}{h^2-2}$ junto con $f(t_0,Y_0)=f(0,Y_0)=0$ se tiene que $Y_1=-2+\dfrac{h}{2}\left(\dfrac{4h}{h^2-2}\right)=\dfrac{4}{h^2-2}$.
Para hallar $Y_2^{h_1=0.5}$ que aproxima $y(1)$ sustituimos $h_1=0.5$ en la anterior expresión de Y_1 y calculamos una iteración más, con lo que $Y_2^{h_1}=-3.337$.

iii) A partir del primer apartado podemos calcular que $y(1)=-3.236$.
Calculamos $E_{t=1}^{h_1}=\left|Y_2^{h_1}-y(1)\right|=0.101$ y $E_{t=1}^{h_2}=\left|Y_{10}^{h_2}-y(1)\right|=0.003$.

Dado que entre los pasos h_1 y h_2 hay un factor de reducción $q = 5$, tenemos que

$$E_{t=1}^{h_2} \approx Ch_2^p = C\left(\frac{h_1}{5}\right)^p \approx \frac{E_{t=1}^{h_1}}{5^p}\,,$$

donde p es el orden del método. Aplicando logaritmos obtenemos que $p \approx 2.19$, con lo que la estimación del orden del método es $\boxed{p = 2}$.

Cuestión 17 Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' + ky = k\sin t + \cos t \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad , \quad t \geq 0\,,$$

donde k es un parámetro real positivo.

(a) Clasificar la ecuación diferencial del PVI y hallar su solución.

(b) Tomando $k = 3$ en el PVI, hallar el valor aproximado de $y(\pi/4)$ mediante el método de Euler explícito con paso $h = \pi/4$. Comparar el resultado con el obtenido usando la solución exacta $y(t) = \sin t + e^{-3t}$

(c) ¿Es admisible la aproximación obtenida en el apartado (b) con el paso $h = \pi/4$? En caso afirmativo, justificar la respuesta. En caso negativo, obtener una cota superior del paso h que aproxime $y(\pi/4)$ de manera admisible.

SOLUCIÓN:

(a) Es una EDO de primer orden lineal. La resolveremos por factor integrante donde $\mu = e^{kt}$. Por lo tanto

$$(e^{kt}y)' = e^{kt}(k\sin t + \cos t) \Rightarrow e^{kt}y = k\int e^{kt}\sin t\,dt + \int e^{kt}\cos t\,dt + C$$

Como $\int e^{kt}\cos t\,dt = e^{kt}\sin t - k\int e^{kt}\sin t\,dt$ más una constante, directamente se obtiene que

$$y = \sin t + Ce^{-kt}\,.$$

Aplicado la condición inicial obtenemos que $C = 1$, con lo que la solución del PVI es:

$$\boxed{y = y(t) = \sin t + e^{-kt}}$$

(b) El valor aproximado de $y(\pi/4)$ obtenido mediante la primera iteración del método de Euler explícito es: $Y_1^{h=\frac{\pi}{4}} = 1+h(1-k) = 1+\frac{\pi}{4}(1-3) = -0.571$. El valor exacto es $y(\pi/4) = 0.802$. Por tanto, teniendo en cuenta los decimales que estamos considerando, el error cometido en la aproximación es: $|y(\pi/4) - Y_1^{h=\frac{\pi}{4}}| = 1.373$

(c) Tal y como se constata en el apartado anterior, el valor exacto es positivo y su correspondiente aproximación es negativa, por tanto no parece que dicha aproximación sea admisible. Para encontrar una cota superior del paso h que aproxime $y(\pi/4)$ de manera admisible hacemos el siguiente análisis:
Al examinar la solución exacta, $y = \sin t + e^{-3t}$, se aprecia el carácter rígido del problema debido al término e^{-kt} con $k = 3$, por tanto existirá una cota superior para los posibles valores de h a la hora de garantizar la estabilidad de la solución numérica. A raíz de los resultados del apartado anterior se infiere que el paso $h = \dfrac{\pi}{4}$ está por encima de esa cota.
En lo que sigue se proporcionará una acotación del paso h.

Del PVI se tiene que $f(t, y) = -ky+k\sin t+\cos t$. Por claridad llamamos $g_n = k\sin t_n+\cos t_n$, con lo que $f(t_n, Y_n) = -kY_n+g_n$. Partiendo del esquema numérico de Euler explícito se tiene:

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} &= Y_n + hf(t_n, Y_n) \\
&= (1 - hk)Y_n + h\, g_n \\
&= (1 - hk)^2 Y_{n-1} + h(g_n + (1 - hk)g_{n-1}) \\
&= (1 - hk)^3 Y_{n-2} + h(g_n + (1 - hk)g_{n-1} + (1 - hk)^2 g_{n-2}) \\
&= ... \\
&= (1 - hk)^{n+1} Y_0 + h\sum_{p=0}^{p=n}(1 - hk)^p g_{n-p}
\end{aligned}$$

Las potencias $(1 - hk)^{n+1}$ tienden a cero cuando $n \to \infty$ si $|1 - kh| < 1$. Dado que $k > 0$ se obtiene que $\boxed{h < \dfrac{2}{k} = \dfrac{2}{3}}$. Por tanto, el paso $h = \pi/4 > 2/3$ y esto justifica la aproximación no admisible.
Por otro lado, si tomamos por ejemplo $h = \dfrac{\pi}{8} < \dfrac{2}{3}$, se tiene que en dos iteraciones se llega al valor $Y_2^{h=\frac{\pi}{8}} = 0.775$, el cual es un valor aproximado admisible para $y(\pi/4)$.

Cuestión 18 Hallar la solución del siguiente problema de valor inicial y escribir dicha solución de forma explícita:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \ln x)y' = 1 + \ln x + \dfrac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{array} \right. , \quad 0 < x < e.$$

SOLUCIÓN:
La ecuación diferencial del problema de valor inicial es exacta, ya que si reordenamos los términos de la ecuación y la dejamos expresada en la forma $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, se obtiene:

$$(1 + \ln x + \frac{y}{x}) + (\ln x - 1)y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

Dado que la ecuación es exacta, sabemos que su solución viene dada por $F(x, y(x)) = C$, donde C es una constante y F es una función que satisface $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$. Se puede obtener F del siguiente modo:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (1 + \ln x + \frac{y}{x})dx = x + x\ln x - x + y\ln x + h(y) = x\ln x + y\ln x + h(y)$$

donde $h = h(y)$ es una función a determinar. Por otro lado, dado que, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$, se obtiene $\ln x - 1 = \ln x + h'(y) \Rightarrow h'(y) = -1 \Rightarrow h(y) = -y$, tomando nula la constante de integración. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$F(x, y(x)) = x\ln x + y(x)\ln x - y(x) = C$$

Imponiendo el valor inicial $y(1) = 1$ obtenemos la constante $C = -1$.

La solución del problema de valor inicial dada en forma explícita es: $\boxed{y(x) = \dfrac{x\ln x + 1}{1 - \ln x}\ ,\ \text{con } 0 < x < e}$

Cuestión 19 Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' + y = 2\,t^2 \\ y(0) = 5\,. \end{cases}$$

(i) Comprobar que $y(t) = e^{-t} + 2\,t^2 - 4\,t + 4$ es la solución exacta del PVI.

(ii) Usar el siguiente método de Runge–Kutta

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2}\,(K_1 + K_2)\,, \quad \text{con} \quad K_1 = h\,f(t_n, Y_n)\,,\ K_2 = h\,f(t_{n+1}, Y_n + K_1)\,,$$

y con $n = 0, 1, 2, \ldots$, para aproximar el valor $y(0.2)$ con paso $h = h_1 = 0.1$.

(iii) Sabiendo que $Y_{20}^{h_2} = 4.09875$ es una aproximación de $y(0.2)$ calculada con paso $h = h_2 = 0.01$, estimar el orden del método numérico descrito en el apartado (ii).

SOLUCIÓN:

(i) Resolviendo la ecuación diferencial *lineal* dada (mediante el factor integrante $\mu(t) = e^{\,t}$) junto con la condición inicial $y(0) = 5$, se obtiene la solución propuesta en el enunciado. Por otro lado, la validez de dicha solución se puede comprobar sustituyendo sus expresiones en la ecuación diferencial y en la condición inicial del PVI.

(ii) Podemos escribir la ecuación diferencial en la forma $y' = f(t, y) = 2\,t^2 - y$. Entonces, aplicando la fórmula del método numérico, con $h = h_1 = 0.1$, para $n = 0$ y $n = 1$, se obtienen $Y_1 = 4.52600$ e $\boxed{Y_2 = Y_2^{h_1} = 4.10093}$, respectivamente. Concretamente, el valor recuadrado es la aproximación de $y(0.2)$ que nos piden.

(iii) Usando la solución exacta escrita en (i), calculamos $y(0.2) = 4.09873$. Por otro lado, se tiene que $E^{h_1}_{t=0.2} = \left| Y^{h_1}_2 - y(0.2) \right| = 0.0022$ y que $E^{h_2}_{t=0.2} = \left| Y^{h_2}_{20} - y(0.2) \right| = 0.00002$.
Dado que $h_2 = h_1/10$, se tiene que

$$E^{h_2}_{t=0.2} \approx C\, h_2^p = C \left(\frac{h_1}{10}\right)^p \approx \frac{E^{h_1}_{t=0.2}}{10^p},$$

donde p es el orden del método (C es una constante). De esta expresión se obtiene $p \approx 2.04$. Esto nos permite concluir que el orden del método numérico del apartado (ii) es $\boxed{p = 2}$.

Cuestión 20 Dada la ecuación diferencial $xy^2y' + x^3 = y^3$, con $0 < x < 2$, se pide:

(a) Clasificarla razonadamente.

(b) Resolverla sujeta a la condición $y(1) = 2$.

SOLUCIÓN:

(a) Es una ecuación diferencial de primer orden, no lineal, y homogénea, porque dividiendo por xy^2 ($x > 0$, suponiendo que $y(x) \neq 0$ para $x \in (0, 2)$) y despejando y' se puede expresar como

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^{-2},$$

siendo el lado derecho una función de y/x. Otra forma de ver que es homogénea consiste en despejar $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} \equiv F(x, y)$ y observar que ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$F(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha y}{\alpha x} - \frac{(\alpha x)^2}{(\alpha y)^2} = \frac{\alpha y}{\alpha x} - \frac{\alpha^2 x^2}{\alpha^2 y^2} = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} = F(x, y).$$

(b) Haciendo el cambio de variable $v = \frac{y}{x}$, que implica $y' = v'x + v$, la ecuación se convierte en una ecuación de variables separables

$$v'x + v = v - v^{-2} \implies v^2 dv = -\frac{dx}{x}.$$

Integrando se obtiene $\frac{v^3}{3} = -\ln x + C$ y deshaciendo el cambio $\frac{y^3}{3x^3} = -\ln x + C$, donde C es una constante. Finalmente, usando la condición inicial $y(1) = 2$, obtenemos $C = 8/3$. Por lo tanto la solución deseada es

$$\frac{y^3}{3x^3} = -\ln x + \frac{8}{3} \implies \boxed{y^3 = x^3(8 - 3\ln x)}.$$

Cuestión 21 Se considere el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + 6\,y \,=\, 0 \\ y(0) \,=\, 1\,. \end{cases}$$

(i) Aplicar una iteración del método de Euler explicito con paso $h_1 = 0.05$. Además analizar si el método es estable con el paso sugerido.

(ii) Usar el valor Y_1 calculado en (i) y el siguiente método de Adams–Moulton de orden 2

$$Y_{n+2} \,=\, Y_{n+1} + \frac{h}{2}\Big[\, f(t_{n+1}, Y_{n+1}) \,+\, f(t_{n+2}, Y_{n+2})\,\Big]\,,$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$, para aproximar el valor $y(0.1)$ usando $h = h_1 = 0.05$.

(iii) Sabiendo que $E^{h_2}_{t=0.1} = 0.00112$ es el error cometido al aproximar $y(0.1)$ mediante el método en (ii) con paso $h_2 = h_1/q$, calcular el valor de h_2 (notar que $y(0.1) = 0.54881$ y $q \in \mathbb{N}$ es el factor de reducción del paso).

SOLUCIÓN:

(i) Mediante una iteración del método de Euler explicito (para $n = 0$) con paso $h_1 = 0.05$ se obtiene $Y_1 \,=\, Y_0 - 6\,h_1\,Y_0 \,=\, 1 - 0.3 \,=\, 0.7$. A pesar de que la ecuación diferencial lineal dada es *rígida*, el esquema numérico es estable, puesto que $h_1 = 0.05 \,<\, 2\,/\,6 \,\approx\, 0.33$.

(ii) Aplicando la formula del método numérico propuesto, con $h = h_1 = 0.05$, para $n = 0$ se obtiene $Y_2 = Y_1 + (h_1/2)\,[\,-6\,Y_1 - 6\,Y_2\,]$, esto es $Y_2 = Y_1\,(1 - 3\,h_1)\,/\,(1 + 3\,h_1) = 0.51739$. Por tanto, $\boxed{Y_2 = Y_2^{h_1} = 0.51739}$ es la aproximación de $y(0.1)$ buscada.

(iii) Usando el valor $y(0.1) = 0.54881$, podemos calcular $E^{h_1}_{t=0.1} \,=\, \Big|\,Y_2^{h_1} - y(0.1)\Big| \,=\, 0.03142$. Entonces, siendo $p = 2$ el orden del método en (ii), resulta que

$$E^{h_2}_{t=0.1} \,\approx\, C\,h_2^2 \,=\, C\left(\frac{h_1}{q}\right)^2 \,\approx\, \frac{E^{h_1}_{t=0.1}}{q^2}\,,$$

donde $q \in \mathbb{N}$ es el factor de reducción del paso. Finalmente de la expresión anterior se calcula $q \approx 5$ y se puede concluir que $\boxed{h_2 = h_1/5 = 0.01}$.

Cuestión 22 Dada la ecuación diferencial

$$3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2 + y^2)y' = 0\,,$$

se pide:

i) Probar que la ecuación diferencial no es exacta.

ii) Comprobar que la ecuación se convierte en exacta si se multiplica por el factor e^{3x}.

iii) Hallar la solución sabiendo que $y(1) = 2$.

SOLUCIÓN:

i) Sean las funciones $M(x,y) = 3x^2y + 2xy + y^3$ y $N(x,y) = x^2 + y^2$.
Dado que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3x^2+2x+3y^2 \neq 2x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, concluimos que la ecuación diferencial $M+Ny' = 0$ no es exacta.

ii) Siguiendo el enunciado, tenemos ahora la ecuación

$$(3x^2y + 2xy + y^3)\, e^{3x} + (x^2 + y^2)\, e^{3x}\, y' = 0\,,$$

y llamando $\hat{M}(x,y) = (3x^2y+2xy+y^3)\, e^{3x}$, $\hat{N}(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{3x}$, se tiene que $\dfrac{\partial \hat{M}}{\partial y} = \dfrac{\partial \hat{N}}{\partial x}$, por tanto la ecuación $\hat{M} + \hat{N}y' = 0$, sí es exacta.

iii) Dado que la ecuación es exacta, existe una función $F(x,y)$, que satisface $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \hat{M}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \hat{N}$.
Integrando la última ecuación respecto de y se tiene $F(x,y) = (x^2y + \frac{y^3}{3})e^{3x} + H(x)$. Para hallar la función $H(x)$ usamos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (y^3 + 3x^2y + 2xy)e^{3x} + H'(x) = (3x^2y + 2xy + y^3)\, e^{3x} = \hat{M}(x,y)\,,$$

identificando términos se obtiene $H'(x) = 0 \implies H(x) = k$ (constante), por tanto la solución general de la ecuación es $(x^2y(x) + \dfrac{y(x)^3}{3})e^{3x} = c$ (constante).
Imponiendo la condición $y(1) = 2$, se obtiene $c = (2 + \frac{8}{3})e^3$.
Finalmente la solución pedida es

$$\boxed{(x^2y + \tfrac{y^3}{3})e^{3x} = \tfrac{14}{3}e^3}$$

Cuestión 23 Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y + e^y y' = k - x(1 + y')\,; \qquad x > 0\,; \qquad k \in \mathbb{R}$$

Se pide:
a) Clasificarla razonadamente.
b) Hallar su solución general.
c) En función de k hallar todas las soluciones particulares que cumplen $y(1) = 1$.
d) Escribir la solución del apartado c) que se obtiene para $k = 1$.

SOLUCIÓN:
a) Es exacta, porque al expresarla como: $(y + x - k)dx + (e^y + x)dy = 0$

se cumple que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial (y + x - k)}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial (e^y + x)}{\partial x}$

b) La resolvemos de este modo:

$$F(x,y)=\int M(x,y)\mathrm{d}x=\int(y+x-k)dx=yx+\frac{x^2}{2}-kx+h(y)$$

Como se debe cumplir $\dfrac{\partial F}{\partial y}=N$, calculamos la derivada parcial e igualamos a N, y nos queda $h'(y)=e^y$. Integrando (tomando nula la constante de integración), $h(y)=e^y$, con lo que se obtiene la solución implícita $yx+\dfrac{x^2}{2}-kx+e^y=C$.

c) Para $y(1)=1$ resulta $\quad C=e+\dfrac{3}{2}-k \quad$ luego existe la solución particular $\forall k\in\mathbb{R}$

d) Con $k=1$ la solución particular es $\boxed{yx+\dfrac{x^2}{2}-x+e^y=e+\dfrac{1}{2}}$

Cuestión 24 a) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{x}{y}y'=1+\ln x-\ln y$$

b) Calcular la solución que cumple la condición: $y(1)=2$.

SOLUCIÓN:

a) Es una ecuación diferencial de primer orden, no lineal. Se puede resolver de dos modos:

1.- Es homogénea porque, reordenando términos, podemos expresarla como:

$$y'=\frac{y}{x}(1+\ln\frac{1}{\frac{y}{x}})=F(\frac{y}{x})$$

2.- Es exacta, porque al expresarla como:

$$(1+\ln x-\ln y)dx-\frac{x}{y}\,dy=0$$

o bien como

$$(1+\ln x-\ln y)-\frac{x}{y}\,y'=0$$

se cumple que $\quad \dfrac{\partial M}{\partial y}=-\dfrac{1}{y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ con $M(x,y)=1+\ln x-\ln y\,;\quad N(x,y)=\dfrac{x}{y}$

La resolvemos de este segundo modo:

$$F(x,y)=\int M(x,y)\mathrm{d}x=\int(1+\ln x-\ln y)dx=x+(x\ln x-x)-x\ln y+h(y)=x\ln x-x\ln y+h(y)$$

NOTA: la integral de $\ln x$ se obtiene fácilmente por integrando por partes.

Como se debe cumplir $\dfrac{\partial F}{\partial y}=N$ hacemos la derivada parcial, igualamos y nos queda $h'(y)=0$.

Por lo tanto $h(y) = C$ y nos queda como solución implícita $x \ln x - x \ln y = C$.

Despejamos para obtener la función solución $y(x)$ explícitamente:

$$x(\ln x - \ln y) = C \quad \Rightarrow \quad \ln(\frac{y}{x}) = \frac{C}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y(x) = x\, e^{\frac{C}{x}}}$$

NOTA: Tras cambiar todo de signo usamos C en lugar de -C.

b) Con $y(1) = 2$ obtenemos $2 = e^C$ y por tanto la solución particular es $\boxed{y(x) = x\, 2^{\frac{1}{x}}}$

Cuestión 25 Dada la siguiente ecuación diferencial

$$(x+y)^2 + (2xy + x^2 - 1)y' = 0\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

iii) Escribir la solución que satisface $y(3) = 1$.

SOLUCIÓN:
(i) Sean las funciones $M(x,y) = (x+y)^2$ y $N(x,y) = x^2 + 2xy - 1$.
La ecuación es una ecuación diferencial ordinaria, no lineal, de primer orden **exacta**, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; 2(x+y) \;=\; \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

(ii) Dado que la ecuación es exacta, existe una función $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} \;=\; M(x,y) \;=\; (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \;=\; N(x,y) \;=\; x^2 + 2xy - 1\,. \tag{2}$$

Por tanto, integrando (3) respecto a x da $F(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2y + y^2x + h(y)$, donde $h(y)$ es una función a determinar. Igualando la derivada con respecto a y de $F(x,y)$ con (4) se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial y} \;=\; x^2 + 2xy + \frac{dh}{dy} \;=\; x^2 + 2xy - 1\,,$$

por consiguiente

$$\frac{dh}{dy} \;=\; -1 \qquad \Longrightarrow \qquad h(y) \;=\; -y$$

donde hemos tomado igual a cero la constante de integración.
La solución general se puede escribir en la forma

$$F(x,y) \;=\; c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^3}{3} + x^2y + y^2x - y \;=\; c\,,$$

donde c es una constante arbitraria.
Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{\frac{x^3}{3} + x^2y + y^2x - y \;=\; c}$$

(iii) En la solución general imponemos la condición $y(3) = 1$ y obtenemos $9 + 9 + 3 - 1 = 20 = c$.
La solución pedida es:

$$\boxed{\frac{x^3}{3} + x^2y + y^2x - y - 20 \;=\; 0}$$

Cuestión 26 Dada la siguiente ecuación diferencial

$$3x^2 - 2xy + (6y^2 - x^2 + 3)y' = 0\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

iii) Escribir la solución que satisface $y(0) = 1$.

SOLUCIÓN:

(i) Sean las funciones $M(x, y) = 3x^2 - 2xy$ y $N(x, y) = 6y^2 - x^2 + 3$.
La ecuación es una ecuación diferencial ordinaria, no lineal, de primer orden **exacta**, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; -2x \;=\; \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

(ii) Dado que la ecuación es exacta, existe una función $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} \;=\; M(x,y) \;=\; 3x^2 - 2xy\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \;=\; N(x,y) \;=\; 6y^2 - x^2 + 3\,. \tag{4}$$

Por tanto, integrando (3) respecto a x da $F(x, y) = x^3 - x^2y + h(y)$, donde $h(y)$ es una función a determinar. Igualando la derivada con respecto a y de $F(x, y)$ con (4) se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial y} \;=\; -x^2 + \frac{dh}{dy} \;=\; 6y^2 - x^2 + 3\,,$$

por consiguiente

$$\frac{dh}{dy} \;=\; 6y^2 + 3 \qquad \Longrightarrow \qquad h(y) \;=\; 2y^3 + 3y$$

donde hemos tomado igual a cero la constante de integración.
La solución general se puede escribir en la forma

$$F(x, y) \;=\; c \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^3 - x^2y + 2y^3 + 3y \;=\; c\,,$$

donde c es una constante arbitraria.
Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{x^3 - x^2y + 2y^3 + 3y \;=\; c}$$

(iii) En la solución general imponemos la condición $y(0) = 1$ y obtenemos $2+3 = 5 = c$. La solución pedida es:

$$\boxed{x^3 - x^2y + 2y^3 + 3y - 5 \;=\; 0}$$

Cuestión 27 Dada la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + xy + y^2}{x^2}\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

iii) Escribir la solución que satisface $y(1) = 2$.

SOLUCIÓN:

i) Es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal homogénea. Es homogénea porque la ecuación se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = 4 + \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = F(\frac{y}{x})\,,$$

siendo F una función que depende del cociente entre y y x.

ii) Para halla la solución general, efectuamos el cambio de variable dependiente $y = xv$, donde $v = v(x)$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene:

$$x\frac{dv}{dx} + v = 4 + v + v^2 \Longrightarrow \frac{dv}{v^2+4} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \int \frac{dv}{v^2+4} = \int \frac{dx}{x}\,.$$

Calculando las integrales se tiene que: $\dfrac{1}{2}\arctan(\dfrac{v}{2}) = \ln(|x|) + K$, donde K es una constante de integración. Deshaciendo el cambio de variable la solución general, escrita en forma implícita es: $\dfrac{1}{2}\arctan(\dfrac{y}{2x}) - \ln(|x|) = K$. En este caso además la podemos también escribir en forma explícita:

$$\boxed{y(x) = 2\,x\,\tan(2(K + \ln(|x|))}$$

iii) $y(1) = 2 \Longrightarrow 2 = 2\tan(2K) \Longrightarrow 2K = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow K = \frac{\pi}{8}$. Por tanto la solución pedida es:

$$\boxed{y(x) = 2\,x\,\tan(\frac{\pi}{4} + \ln(x^2))}$$

Cuestión 28 Dada la siguiente ecuación diferencial

$$6\,x + y\,\cos(x) + (e^y + \sin(x))\,y' = 0\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar su solución general.

iii) Comprobar dicha solución.

SOLUCIÓN:

i) Es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal. Para saber si es exacta, consideramos las funciones $M(x,y) = 6x + y\cos(x)$ y $N(x,y) = e^y + \sin(x)$ y vemos que se cumple la igualdad

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos(x) = \frac{\partial N}{\partial x}\,,$$

por tanto se trata de de una ecuación diferencial exacta.

ii) Dado que la ecuación es exacta, existe una función $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = 6x + y\cos(x)\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = e^y + \sin(x)\,. \tag{6}$$

Por tanto, integrando (3) respecto a x da $F(x,y) = 3x^2 + y\sin(x) + h(y)$, donde $h(y)$ es una función a determinar. Igualando la derivada con respecto a y de $F(x,y)$ con (4) se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin(x) + \frac{dh}{dy} = \sin(x) + e^y\,,$$

por consiguiente

$$\frac{dh}{dy} = e^y \qquad \Longrightarrow \qquad h(y) = e^y$$

donde hemos tomado igual a cero la constante de integración.
La solución general se puede escribir en la forma

$$F(x,y) = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{3x^2 + y\sin(x) + e^y = c}$$

donde c es una constante arbitraria.

iii) Para comprobar la solución obtenida en el apartado anterior procedemos a derivarla implícitamente respecto de la variable independiente x, teniendo en cuenta que la función incógnita $y = y(x)$.

$$6x + y'\sin(x) + y\cos(x) + e^y y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad 6\,x + y\,\cos(x) + (e^y + \sin(x))\,y' = 0\,,$$

como vemos es la ecuación diferencial del enunciado.