CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO
TEMA 2: Ecuaciones diferenciales de segundo orden.
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 Resolver la ecuación diferencial:

$$2y'' - 5y' - 3y = 0$$

Cuestión 2 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

Cuestión 3 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 4y' + 7y = 0$$

Cuestión 4 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

Cuestión 5 Resolver la ecuación diferencial:

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

Cuestión 6 Resolver el problema de valores iniciales (PVIs):

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 3e^{2x} \\ y(0) = 0\,, \;\; y'(0) = -2 \end{cases} .$$

Cuestión 7 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y = \sin x$$

Cuestión 8 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 4y = 4\cos(2x)$$

Cuestión 9 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 4y = -4x$$

Cuestión 10 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 4y = 4\cos(2x) - 4x$$

Cuestión 11 Resolver el problema de valores iniciales:

$$y'' - 4y' + 4y = 0\,, \;\; y(0) = 1\,, \;\; y'(0) = 1$$

Cuestión 12 Resolver el problema de valores iniciales:

$$y'' - y' - 2y = 0\,, \;\; y(0) = 1\,, \;\; y'(0) = 0$$

Cuestión 13 Resolver el problema de valores iniciales:

$$y'' + 3y' + 2y = 0\,, \;\; y(0) = 1\,, \;\; y'(0) = 0$$

Cuestión 14 Resolver el problema de valores iniciales:

$$y'' - 2y' + 2y = e^{-x}\,, \;\; y(0) = 0\,, \;\; y'(0) = 1$$

Cuestión 15 Resolver el problema de valores iniciales:

$$y'' - 2y' + 2y = \cos x\,, \;\; y(0) = 1\,, \;\; y'(0) = 0$$

Cuestión 16 Resolver el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 4y = e^t\,; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0\,.$$

Hallar el valor de $y(2)$.

Cuestión 17 Resolver el siguiente problema de valor inicial

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Cuestión 18 Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - 2y' + 5y \;=\; t\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 2\,.$$

Cuestión 19 i) Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - y' - 6y = 0\,; \quad y(0) = 1,\; y'(0) = -1\,,$$

ii) Comprobar la solución.

iii) Explicar el comportamiento de la solución cuando la variable independiente tiende a $\pm\infty$.

Cuestión 20 Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' - 2y' + y = \cos t; \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 2$$

Cuestión 21 Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' + 5y' - 6y = 7e^x; \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0$$

Cuestión 22 Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ax}\,; \quad \text{donde } a \text{ es un parámetro real.}$$

Se pide:

i) Resolver la EDO cuando $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

ii) Resolver la EDO cuando $a = 1$.

Cuestión 23 Dada la ecuación diferencial

$$x^2y'' + 5\,x\,y' - 21y = 5\,x\,\cos(\ln(x))\,;$$

Se pide:

1. Clasificar, razonadamente, la ecuación.
2. Aplicar el cambio de variable independiente: $x = e^t$, y demostrar que la ecuación diferencial se transforma en
$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 4\frac{dy}{dt}(t) - 21y(t) = 5\cos(t)e^t$$
3. Comprobar que la solución de la ecuación del apartado ii) es
$$y(t) = Ae^{-7t} + Be^{3t} + \frac{e^t}{65}(6\sin(t) - 17\cos(t))\,; \quad \text{siendo } A, B \text{ constantes.}$$
4. Hallar la solución de la ecuación del enunciado.

Cuestión 24 Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}\,.$$

Cuestión 25 Sea el problema de valor inicial (PVI) dado por la ecuación diferencial ordinaria:

$$y''' + 4y' = 4e^{2t}\,; \quad \text{y las condiciones iniciales} \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = 1;$$

Resolver el PVI siguiendo los siguientes pasos:
(i) Aplicar el cambio $v(t) = y'(t)$ a la ecuación diferencial del PVI y hallar la solución general de la ecuación de segundo orden resultante.
(ii) Deshacer el cambio hecho en (i), integrar y obtener la solución $y(t)$ del PVI.

Cuestión 26 Dada la ecuación diferencial ordinaria (EDO): $\quad y'' - 4xy' - 4y \,=\, e^{\,x}\,;\quad$ se pide:

(a) Asumiendo que la solución de la EDO viene dada por la serie de potencias: $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,;$ encontrar la relación de recurrencia que deben satisfacer los coeficientes a_n.

(b) Suponiendo que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, hallar el valor aproximado de la solución de la EDO en el punto $x = 2$, usando solamente los cinco primeros términos de la serie de potencias del apartado (a).

NOTA: Puede ser útil el siguiente resultado: $e^{\,x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Cuestión 27 Sea la función $f(x) \,=\, 27 + (x^2+1)\, y'$, donde y' es la derivada primera de la función $y = y(x)$ respecto de la variable independiente x. Sabiendo que y es suficientemente derivable, se pide:

(a) Demostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ equivale a la ecuación diferencial $(x^2+1)y'' + 2xy' = 0$.

(b) Resolver la ecuación diferencial del apartado (a) mediante series de potencias de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

(c) Imponer la condición inicial $y(0) = \beta$, $y'(0) = 1$. Hallar para qué valor del parámetro $\beta \in \mathbb{R}$ se obtiene una solución impar, esto es, $y = y(x)$ satisface que $y(-x) = -y(x)$.

Cuestión 28 Resolver el siguiente problema de valor inicial (PVI) aplicando el cambio de variable $x = e^z \Longleftrightarrow z = \ln(x)$

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' + \frac{5}{2}y = 0\,, \quad x > 0 \\ y(1) = -1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

Cuestión 29 Comprueba que las funciones $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = t$ son dos soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial

$$(1-t)y'' + ty' - y \,=\, 2(t-1)^2e^{-t}$$

con $0 < t < 1$. Además, calcula a partir de y_1 , y_2 una solución particular de la ecuación no-homogénea dada, usando el método de variación de parámetros.

Cuestión 30 Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^t$$

se pide:

i) Hallar su solución general aplicando el método de variación de los parámetros.

ii) Hallar una solución particular de la ecuación mediante el método de coeficientes indeterminados.

Cuestión 31 Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - y = e^{-x} + \sin x; \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

Cuestión 32 Dada la ecuación diferencial

$$\alpha y'' + y' + \frac{1}{4}y = f(x)\,,$$

donde α es un parámetro real y $f(x)$ es una función, se pide:

i) Clasificar y resolver la ecuación diferencial cuando $\alpha = 0$ y $f(x) = e^{\frac{3x}{4}}$

ii) Clasificar y resolver la ecuación diferencial cuando $\alpha = 5$ y $f(x) = 0$.

iii) Usando dos métodos distintos para hallar soluciones particulares, resolver el problema de valor inicial que resulta cuando $\alpha = 1$ y $f(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$, sabiendo que $y(0) = 1\,, y'(0) = 0$.

Cuestión 33 Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de coeficientes indeterminados o el de variación de los parámetros:

$$y'' - y' - 6y = e^x + 1; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Cuestión 34 Halla, mediante serie de potencias, la solución a la siguiente EDO:

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0\,.$$

Cuestión 35 Resolver la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}$$

Cuestión 36 Sea la ecuación diferencial:

$$(x^2+1)y''+4y=0,\ ,$$

Suponiendo que la solución de la ecuación viene dada por la serie de potencias $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n\,,$ se pide:

(i) Hallar la relación de recurrencia que satisfacen los coeficientes a_n .

(ii) Aplicando el apartado (i), escribir los tres primeros términos de la serie.

Cuestión 37 Sea la ecuación diferencial

$$(x-1)\,y''+y' \;=\; 0\,.$$

Suponiendo que la solución de la ecuación viene dada por la serie de potencias $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n\,,$ se pide:

(i) Hallar la relación de recurrencia que satisfacen los coeficientes a_n .

(ii) Aplicar las condiciones iniciales $y(0)=0$ e $y'(0)=1$, y escribir los tres primeros términos no nulos de la serie de potencias.

Cuestión 38 Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de los coeficientes indeterminados

$$y''+2y'+2y=t+e^{2t}\,;\quad y(0)=0,\ y'(0)=1\,,$$

Cuestión 39 Dada la ecuación diferencial

$$y''-3y'+2y=e^{-t}\,;\quad y(0)=0,\ y'(0)=1\,,$$

se pide:

i) Hallar su solución general.

ii) Obtener la solución que cumple $y(0)=0\,;\,y'(0)=1\,.$

iii) Comprobar la solución obtenida en el apartado ii).

Cuestión 40 Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y''+2\,y'+y=\cos(2t)\,;\quad y(0)=0,\ y'(0)=0\,,$$
