CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO
TEMA 2: Ecuaciones diferenciales de segundo orden.
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 Resolver la ecuación diferencial:

$$2y'' - 5y' - 3y = 0$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal homogénea con coeficientes constantes.
Su solución es:

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 e^{3x}\,; \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 2 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal homogénea con coeficientes constantes.
Su solución es:

$$y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}\,; \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 3 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 4y' + 7y = 0$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal homogénea con coeficientes constantes.
Su solución es:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} \sin(\sqrt{3}x) + c_2 e^{-2x} \cos(\sqrt{3}x)\,; \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 4 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea con coeficientes constantes. Una solución particular se puede obtener con el método de variación de parámetros o con el de coeficientes indeterminados.
Su solución es:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + (\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2})e^{2x}\,; \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 5 Resolver la ecuación diferencial:

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea con coeficientes constantes. Una solución particular se puede obtener con el método de variación de parámetros.
Su solución es:

$$y(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) - \frac{x}{12}\cos(3x) + \frac{1}{36}\sin(3x)\ln(\sin(3x))\,; \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 6 Resolver el problema de valores iniciales (PVIs):

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 3e^{2x} \\ y(0) = 0\,, \;\; y'(0) = -2 \end{cases} .$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea con coeficientes constantes. Una solución particular se puede obtener con el método de variación de parámetros o con coeficientes indeterminados.
Su solución es:

$$y(x) = e^{-x} + e^{2x}(x-1).$$

Cuestión 7 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y = \sin x$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea con coeficientes constantes. Una solución particular se puede obtener con el método los coeficientes indeterminados.
Su solución es:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{\sin(x)}{5}\,; \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 8 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 4y = 4\cos(2x)$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea con coeficientes constantes. Una solución particular se puede obtener con el método los coeficientes indeterminados.
Su solución es:

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + x\sin(2x)\,; \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 9 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 4y = -4x$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea con coeficientes constantes. Una solución particular se puede obtener con el método los coeficientes indeterminados.
Su solución es:

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - x\,; \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 10 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 4y = 4\cos(2x) - 4x$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea con coeficientes constantes. Una solución particular se puede obtener con el método los coeficientes indeterminados y el principio de superposición.
Su solución es:

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - x + x\sin(2x)\,; \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cuestión 11 Resolver el problema de valores iniciales:

$$y'' - 4y' + 4y = 0\,, \;\; y(0) = 1\,, \;\; y'(0) = 1$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal homogénea con coeficientes constantes.
Aplicando los datos iniciales Su solución es:

$$y(x) = e^{2x}(1 - x).$$

Cuestión 12 Resolver el problema de valores iniciales:

$$y'' - y' - 2y = 0\,, \;\; y(0) = 1\,, \;\; y'(0) = 0$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal homogénea con coeficientes constantes.
Aplicando los datos iniciales Su solución es:

$$y(x) = \frac{2}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}.$$

Cuestión 13 Resolver el problema de valores iniciales:

$$y'' + 3y' + 2y = 0\,,\ \ y(0) = 1\,,\ \ y'(0) = 0$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal homogénea con coeficientes constantes.
Aplicando los datos iniciales Su solución es:

$$y(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}.$$

Cuestión 14 Resolver el problema de valores iniciales:

$$y'' - 2y' + 2y = e^{-x}\,,\ \ y(0) = 0\,,\ \ y'(0) = 1$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea con coeficientes constantes. Una solución particular se puede obtener con el método los coeficientes indeterminados o el de variación de parámetros.
Aplicando las condiciones iniciales su solución es:

$$y(x) = \frac{e^{-x}}{5} + \frac{7}{5}e^{x}\sin(x) - \frac{1}{5}e^{x}\cos(x).$$

Cuestión 15 Resolver el problema de valores iniciales:

$$y'' - 2y' + 2y = \cos x\,,\ \ y(0) = 1\,,\ \ y'(0) = 0$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea con coeficientes constantes. Una solución particular se puede obtener con el método los coeficientes indeterminados o el de variación de parámetros.
Aplicando las condiciones iniciales su solución es:

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{5} - \frac{2}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}e^{x}\sin(x) + \frac{4}{5}e^{x}\cos(x).$$

Cuestión 16 Resolver el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 4y = e^t\,; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0\,.$$

Hallar el valor de $y(2)$.

SOLUCIÓN:
Resolviendo la ecuación e imponiendo la condición inicial se tiene que:

$$y(t) = \frac{1}{9}e^t + \frac{8}{9}e^{-2t} + \frac{5}{3}te^{-2t} \Rightarrow y(2) = \frac{1}{9}(e^2 + 38e^{-4})\,.$$

Cuestión 17 Resolver el siguiente problema de valor inicial

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea.
Aplicando las condiciones iniciales se obtiene: $y(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) + e^{-2t}$

Cuestión 18 Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - 2y' + 5y \;=\; t\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 2\,.$$

SOLUCIÓN:
Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea.
Aplicando las condiciones iniciales se obtiene:

$$\boxed{y(t) \;=\; \frac{1}{25}\Big[\,2 + 5t + 23\,e^t\cos(2t) + 11\,e^t\sin(2t)\Big]}\,.$$

Cuestión 19 i) Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - y' - 6y = 0\,; \quad y(0) = 1,\; y'(0) = -1\,,$$

ii) Comprobar la solución.

iii) Explicar el comportamiento de la solución cuando la variable independiente tiende a $\pm\infty$.

SOLUCIÓN:

i) Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea.
Aplicando las condiciones iniciales se obtiene:

$$y(t) = \frac{1}{5}(e^{3t} + 4e^{-2t})$$

ii) La comprobación es inmediata sustituyendo en las condiciones iniciales y en la ecuación.

iii) Para ver el comportamiento asintótico de la solución tendremos en cuenta que

$$\lim_{t\to-\infty} e^{3t} = \lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} e^{3t} = \lim_{t\to-\infty} e^{-2t} = +\infty \Longrightarrow \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = +\infty$$

Así pues, la solución, $y(t)$, no está acotada cuando $t \to \pm\infty$

Cuestión 20 Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' - 2y' + y = \cos t; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

SOLUCIÓN:

Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea.
Aplicando las condiciones iniciales se obtiene:

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2}te^t + e^t - \frac{1}{2}\sin t}$$

Cuestión 21 Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' + 5y' - 6y = 7e^x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

SOLUCIÓN:

Es una EDO de segundo orden lineal no homogénea.
Aplicando las condiciones iniciales se obtiene:

$$\boxed{y(x) = \frac{5}{7}e^x + xe^x + \frac{2}{7}e^{-6x}}$$

Cuestión 22 Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ax}\,; \quad \text{donde } a \text{ es un parámetro real.}$$

Se pide:

i) Resolver la EDO cuando $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

ii) Resolver la EDO cuando $a = 1$.

SOLUCIÓN:

1. Resolvemos la EDO para el caso $a \neq 1, 2$ por el método de los coeficientes indeterminados. Las soluciones de la ecuación característica son:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ r = 1 \end{cases}$$

por tanto, la solución de la EDO homogénea es: $y_h(x) = Ae^{2x} + Be^x$, A, B, constantes.

Dado que $a \neq 1, a \neq 2$, la solución particular es de la forma:

$$y_p(x) = Ce^{ax} \,,$$

donde el coeficiente C se debe de determinar.

$$\left.\begin{array}{r} y_p'(x) = aCe^{ax} \\ y_p''(x) = a^2Ce^{ax} \end{array}\right\} \Rightarrow y_p'' - 3y_p' + 2y_p = (a^2 - 3a + 2)Ce^{ax} = (a-2)(a-1)Ce^{ax}$$

Igualamos con el término no homogéneo de la EDO

$$(a-2)(a-1)Ce^{ax} = e^{ax} \,,$$

con lo que

$$C = \frac{1}{(a-2)(a-1)} \,.$$

Finalmente

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{2x} + Be^x + \frac{1}{(a-2)(a-1)}e^{ax} \,.$$

2. Para el caso $a = 1$, la solución particular es de la forma: $y_p(x) = Cxe^{ax}$, pues $y = e^x$ es una solución de la EDO homegénea. Análogamente a como hicimos en el anterior apartado, se obtiene que

$$C = -1 \,,$$

con lo que

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^x - xe^x \,.$$

Cuestión 23 Dada la ecuación diferencial

$$x^2y'' + 5\,x\,y' - 21y = 5\,x\,\cos\left(\,\ln(x)\,\right);$$

Se pide:

1. Clasificar, razonadamente, la ecuación.

2. Aplicar el cambio de variable independiente: $x = e^t$, y demostrar que la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 4\frac{dy}{dt}(t) - 21y(t) = 5\cos(t)e^t$$

3. Comprobar que la solución de la ecuación del apartado ii) es

$$y(t) = Ae^{-7t} + Be^{3t} + \frac{e^t}{65}(6\sin(t) - 17\cos(t))\,; \quad \text{siendo } A, B \text{ constantes.}$$

4. Hallar la solución de la ecuación del enunciado.

SOLUCIÓN:

1. Es una EDO lineal de segundo orden no homogénea de coeficientes variables, también conocida como ecuación de Euler no homogénea.
2. Realizaremos el cambio $x = e^t$ en la ecuación diferencial y obtendremos una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Ésta quedará en función de los nuevos operadores $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{d^2y}{t^2}$. Aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt};$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}e^{2t} + \frac{dy}{dx}e^t = \frac{d^2y}{dx^2}e^{2t} + \left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)e^t \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

La ecuación diferencial entonces queda

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 4\frac{dy}{dt}(t) - 21y(t) = 5\cos(t)e^t$$

3.

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d^2y}{dt^2}(t) & = & 49Ae^{-7t} + 9Be^{3t} + \frac{e^t}{65}(34\sin(t) + 12\cos(t)) \\
 & + & \\
4\left(\frac{dy}{dt}(t)\right) & = & 4\left(-7Ae^{-7t} + 3Be^{3t} + \frac{e^t}{65}(23\sin(t) - 11\cos(t))\right) \\
 & + & \\
-21\,(y(t)) & = & -21\left(Ae^{-7t} + Be^{3t} + \frac{e^t}{65}(6\sin(t) - 17\cos(t))\right) \\
\hline
 & & 5\cos(t)e^t
\end{array}$$

4. Aplicando el cambio de variable propuesto en ii) $x = e^t \Rightarrow t = \ln(x)$, obtenemos la solución a la ecuación del problema:

$$y(x) = Ax^{-7} + Bx^3 + \frac{x}{65}\left[6\sin(\ln(x)) - 17\cos(\ln(x))\right]$$

Cuestión 24 Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}\,.$$

SOLUCIÓN:
Resolveremos la ecuación diferencial por el método de variación de parámetros.
Si resolvemos la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial obtenemos la solución

$$y_h(x) = C_1e^x + C_2xe^x\,.$$

Obtenemos una solución particular a partir de las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$, donde $y_p(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x$. Calculamos el wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(1+x) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{1+x^2} & e^x(1+x) \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{-x}{1+x^2} \rightarrow u_1(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,, \\ u_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{1+x^2} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow u_2(x) = \arctan(x) \end{aligned}$$

Sumando la solución homogénea más la particular concluimos que

$$y(x) = (-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1)e^x + (\arctan(x) + C_2)xe^x$$

Cuestión 25 Sea el problema de valor inicial (PVI) dado por la ecuación diferencial ordinaria:

$$y''' + 4y' = 4e^{2t}\ ; \quad \text{y las condiciones iniciales} \quad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 1;$$

Resolver el PVI siguiendo los siguientes pasos:
(i) Aplicar el cambio $v(t) = y'(t)$ a la ecuación diferencial del PVI y hallar la solución general de la ecuación de segundo orden resultante.
(ii) Deshacer el cambio hecho en (i), integrar y obtener la solución $y(t)$ del PVI.

SOLUCIÓN:
Sea $v(t) = y'(t) \Longrightarrow v' = y'' \Longrightarrow v'' = y'''$.
Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea: $v'' + 4v = 4e^{2t}$; cuya solución es: $v(t) = v_h(t) + v_p(t)$, donde

$v_h(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$, es la solución general de la ecuación homegénea y $v_p(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t}$ es una solución particular. Así pues, la solución general de la ecuación de segundo orden resultante es: $\boxed{v(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + \frac{1}{2}e^{2t}}$ Dado que $y'(t) = v(t) \implies y(t) = \displaystyle\int v(t)\mathrm{d}t =$ $\dfrac{c_1}{2}\sin(2t) - \dfrac{c_2}{2}\cos(2t) + \dfrac{1}{4}e^{2t} + C$;
y teniendo en cuenta que $y(0) = 1\,, y'(0) = 0\,, y''(0) = 1$, se obtienen:
$c_1 = -\dfrac{1}{2}\,, c_2 = 0\,, C = \dfrac{3}{4}$, por tanto: $\boxed{y(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}\sin(2t)}$

Cuestión 26 Dada la ecuación diferencial ordinaria (EDO): $y'' - 4xy' - 4y = e^{\,x}$; se pide:

(a) Asumiendo que la solución de la EDO viene dada por la serie de potencias: $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$; encontrar la relación de recurrencia que deben satisfacer los coeficientes a_n.

(b) Suponiendo que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, hallar el valor aproximado de la solución de la EDO en el punto $x = 2$, usando solamente los cinco primeros términos de la serie de potencias del apartado (a).

NOTA: Puede ser útil el siguiente resultado: $e^{\,x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

SOLUCIÓN:

(a) Sea $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$, por tanto

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n\,x^{n-2}\,.$$

Sustituyendo estas series en la EDO, se obtiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n\,x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 4n\,a_n\,x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,,$$

donde se ha utilizado el resultado que aparece en la *NOTA* del enunciado.

Para obtener la misma potencia de x en cada serie, cambiamos el índice del sumatorio en la primera serie, dando:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\,a_{n+2}\,x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 4n\,a_n\,x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,;$$

esto equivale a:

$$(2a_2 - 4a_0 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\,(n+2)(n+1)\,a_{n+2} - 4(n+1)\,a_n - \frac{1}{n!}\right] x^n = 0\,.$$

Ahora, igualando a cero los coeficientes de cada potencia de x, se tiene que:

$$2a_2 - 4a_0 - 1 = 0\,, \quad (n+2)(n+1)\,a_{n+2} - 4(n+1)\,a_n - \frac{1}{n!} = 0\,,$$

que se puede expresar en la forma:

$$\boxed{a_2 = \frac{1}{2} + 2a_0\,, \quad a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)!} + \frac{4}{n+2}\,a_n}\,,$$

con $n = 1, 2, \ldots$.

(b) A partir de la relación de recurrencia obtenida en el apartado (a), obtenemos:

$$a_2 = \frac{1}{2} + 2a_0\,, \quad a_3 = \frac{1}{3!} + \frac{4}{3}a_1\,, \quad a_4 = \frac{13}{4!} + 2a_0\,.$$

Dado que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, se tiene:

$$a_2 = \frac{5}{2}\,, \quad a_3 = \frac{1}{6}\,, \quad a_4 = \frac{61}{24}\,.$$

Por lo que el valor aproximado pedido en el enunciado es:

$$\boxed{y(2) \approx a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 1 + 0 + 10 + \frac{4}{3} + \frac{122}{3} = 53}\,.$$

Cuestión 27 Sea la función $f(x) = 27 + (x^2+1)\,y'$, donde y' es la derivada primera de la función $y = y(x)$ respecto de la variable independiente x. Sabiendo que y es suficientemente derivable, se pide:

(a) Demostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ equivale a la ecuación diferencial $(x^2+1)y'' + 2xy' = 0$.

(b) Resolver la ecuación diferencial del apartado (a) mediante series de potencias de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$.

(c) Imponer la condición inicial $y(0) = \beta$, $y'(0) = 1$. Hallar para qué valor del parámetro $\beta \in \mathbb{R}$ se obtiene una solución impar, esto es, $y = y(x)$ satisface que $y(-x) = -y(x)$.

SOLUCIÓN:

(a) Tenemos que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\Big[y'\,(x^2+1) + 27\Big] = (x^2+1)y'' + 2xy'\,.$$

Por tanto, la ecuación $f'(x) = 0$ equivale a la ecuación diferencial $\boxed{(x^2+1)y'' + 2xy' = 0}$

(b) Suponiendo que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, se tiene

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}\,.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial del apartado (a), se obtiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n\, a_n\, x^n \;=\; 0\,.$$

Con objeto de obtener la misma potencia de x en cada una de las series, se efectúa un cambio de índices en la segunda serie, dando lugar a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n\, a_n\, x^n \;=\; 0$$

esto equivale a

$$2a_2 + (6a_3 + 2a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big[n(n+1)\, a_n + (n+2)(n+1)\, a_{n+2} \Big]\, x^n \;=\; 0\,.$$

Ahora, igualando a cero los coeficientes de cada una de las potencias de x, encontramos que

$$2a_2 = 0\,, \quad 6a_3 + 2a_1 = 0\,, \quad n(n+1)\, a_n + (n+2)(n+1)\, a_{n+2} = 0\,,$$

y se obtiene

$$a_2 = 0\,, \quad a_3 = -\frac{1}{3}\, a_1\,, \quad a_{n+2} = -\frac{n}{n+2}\, a_n\,,$$

para $n = 2, 3, \ldots$. Finalmente, calculando los primeros coeficientes en función de a_0 y a_1 se llega a que

$$\boxed{y(x) \;=\; a_0 \;+\; a_1 \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots \right) \;=\; a_0 \;+\; a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}}\,,$$

donde se observa que todos los coeficientes de las potencias de x con exponente par son nulos.

(c) Aplicando la condición inicial se obtiene: $\boxed{a_0 = \beta \text{ y } a_1 = 1}$. Se concluye fácilmente que para que la función $y = y(x)$ sea una función impar hay que tomar $\boxed{\beta = 0}$.

Cuestión 28 Resolver el siguiente problema de valor inicial (PVI) aplicando el cambio de variable $x = e^z \Longleftrightarrow z = \ln(x)$

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' + \frac{5}{2}y = 0\,, \quad x > 0 \\ y(1) = -1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:
La ecuación diferencial del PVI es del tipo Cauchy-Euler, por tanto para hallar su solución conviene hacer el cambio de variable propuesto en el enunciado.
Aplicando la regla de la cadena, se obtiene: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dz}\,; \qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz}\right)$ Sustituyendo estos términos en el PVI se obtiene la siguiente ecuación diferencial, que es de coeficientes contantes:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + \frac{5}{2}y = 0$$

Su ecuación característica es: $r^2 + r + 5/2 = 0$, cuyas soluciones son complejas conjugadas $r_1 = -1/2 + i3/2\,; r_2 = -1/2 - i3/2$. Por tanto la solución general en términos de la variable z es:

$$y(z) = e^{-\frac{z}{2}}\left[a\cos\left(\frac{3}{2}z\right) + b\sin\left(\frac{3}{2}z\right)\right]$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos la solución general en términos de la variable x:

$$y(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left[a\cos\left(\frac{3}{2}\ln(x)\right) + b\sin\left(\frac{3}{2}\ln(x)\right)\right]$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales del PVI se obtienen los valores de las constantes: $a = -1\,; b = 1/3$ Por tanto, la solución del PVI es:

$$\boxed{y(x) = x^{-1/2}\left[\tfrac{1}{3}\sin(3/2\ln(x)) - \cos(3/2\ln(x))\right]}$$

Cuestión 29 Comprueba que las funciones $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = t$ son dos soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial

$$(1-t)y'' + ty' - y \;=\; 2(t-1)^2e^{-t}$$

con $0 < t < 1$. Además, calcula a partir de y_1, y_2 una solución particular de la ecuación no-homogénea dada, usando el método de variación de parámetros.

SOLUCIÓN:
Omitimos la comprobación, pero efectivamente y_1, y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial dada. Para calcular una solución particular de la no-homogénea, reescribimos la ecuación como

$$y'' + \frac{t}{1-t}y' - \frac{1}{1-t}y \;=\; 2(1-t)e^{-t}\,.$$

Según el método de variación de parámetros, suponemos que la solución buscada tiene la forma $y(t) \ = \ u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$, donde u_1 y u_2 son funciones a determinar. Sabemos que sus derivadas verifican el sistema

$$\begin{aligned} u_1' e^t + u_2' t \ &= \ 0 \\ u_1' e^t + u_2' \ &= \ 2(1-t)e^{-t}\,, \end{aligned}$$

o sea tenemos $u_1' \ = \ -2t\,e^{-2t}$, $u_2' \ = \ 2\,e^{-t}$. Finalmente, después de integrar, obtenemos que $u_1 \ = \ (t + \frac{1}{2})\,e^{-2t}$, $u_2 \ = \ -2\,e^{-t}$. Por lo tanto una solución particular es

$$\boxed{y(t) \ = \ \frac{1}{2}(1-2t)e^{-t}}\,.$$

Cuestión 30 Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^t$$

se pide:

i) Hallar su solución general aplicando el método de variación de los parámetros.

ii) Hallar una solución particular de la ecuación mediante el método de coeficientes indeterminados.

SOLUCIÓN:

i) Las raíces de la ecuación característica, $r^2 - 5r + 6 = 0$, son: $r = 3\,, r = 2$. Por tanto la solución general de la ecuación es

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)\,,$$

donde $c_1\,, c_2$ son constantes reales, las funciones $y_1(t) = e^{3t}$, $y_2(t) = e^{2t}$, son soluciones de la ecuación diferencial homogénea e $y_p(t)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea.
Siguiendo el enunciado, calculamos $y_p(t)$ mediante el método de variación de los parámetros.
$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$, donde las funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ satisfacen:
$(i) \quad u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0\,, \qquad (ii) \quad u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(t) = 2e^t$
Resolviendo el sistema $(i)\,,(ii)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \frac{-2e^{3t}}{-e^{5t}} = 2e^{-2t} \quad \Longrightarrow \quad u_1(t) = -e^{-2t}\,, \\ u_2'(t) &= \frac{2e^{4t}}{-e^{5t}} = -2e^{-t} \quad \Longrightarrow \quad u_2(t) = 2e^{-t}\,, \end{aligned}$$

donde hemos tomados nulas las constantes de integración.
Por tanto $y_p(t) = -e^{-2t}e^{3t} + 2e^{-t}e^{2t} = e^t$, y la solución general es:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} + e^t}$$

ii) Dado que $g(t) = 2e^t$, no es una solución de la ecuación diferencial homogénea, proponemos una solución particular de la forma $Y_p(t) = Ae^t$, donde A es un coeficiente indeterminado que se calcula sustituyendo Y_p en la ecuación diferencial. Por tanto:

$$Ae^t - 5Ae^t + 6Ae^t = 2Ae^t \equiv 2e^t \,, \quad \Longrightarrow \quad A = 1 \,.$$

Se tiene que una solución particular (ya obtenida también en el apartado anterior) es: $\boxed{Y_p(t) = e^t}$

Cuestión 31 Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - y = e^{-x} + \sin x; \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

SOLUCIÓN:
Primero calculamos la solución de la ecuación homogénea.

Suponiendo soluciones del tipo $y(x) = e^{rx}$ llegamos a la ecuación característica $r^2 - 1 = 0$, cuyas raices son $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$.

Por tanto la solución general de la ecuación homogénea es: $\quad y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea podemos usar el método de coeficientes indeterminados y tener en cuenta que se cumple el principio de superposición.

Tomando $\quad y_p = Axe^{-x} + B\sin x + C\cos x \quad \Rightarrow \quad y_p'' = (-2A + Ax)e^{-x} - B\sin x - C\cos x$

Sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos $A = B = -1/6$ y $C = 0$

Luego la solución particular es $y_p = -\frac{1}{2}(xe^{-x} + \sin x)$

Y la solución general de la ecuación diferencial es: $\quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \dfrac{1}{2}(xe^{-x} + \sin x)$

Usando las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ obtenemos $c_1 = 3/2 \;\; c_2 = -1/2$.

Y definitivamente la solución del problema de valor inicial es:

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x}$$

Cuestión 32 Dada la ecuación diferencial

$$\alpha y'' + y' + \frac{1}{4}y = f(x) \,,$$

donde α es un parámetro real y $f(x)$ es una función, se pide:

i) Clasificar y resolver la ecuación diferencial cuando $\alpha = 0$ y $f(x) = e^{\frac{3x}{4}}$

ii) Clasificar y resolver la ecuación diferencial cuando $\alpha = 5$ y $f(x) = 0$.

iii) Usando dos métodos distintos para hallar soluciones particulares, resolver el problema de valor inicial que resulta cuando $\alpha = 1$ y $f(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$, sabiendo que $y(0) = 1\,, y'(0) = 0$.

SOLUCIÓN:

i) Tomando $\alpha = 0$ y $f(x) = e^{\frac{3x}{4}}$ se obtiene la ecuación $y' + \frac{1}{4}y = e^{\frac{3x}{4}}$, que es una ecuación diferencial ordinaria, de primer orden, lineal.
Se resuelve mediante el factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{4}\,dx} = e^{\frac{x}{4}}$.
Multiplicando la ecuación por el factor integrante se tiene:

$$e^{\frac{x}{4}}\,y' + \frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}\,y = e^{\frac{x}{4}}\,e^{\frac{3x}{4}} = e^x \quad \Longrightarrow \quad \left(e^{\frac{x}{4}}\,y\right)' = e^x \quad \Longrightarrow \quad e^{\frac{x}{4}}\,y = e^x + C\,,$$

donde C es una constante de integración. Despejando $y(x)$, se obtiene la solución:

$$\boxed{y(x) = C\,e^{-\frac{x}{4}} + e^{\frac{3x}{4}}}$$

ii) Tomando $\alpha = 5$ y $f(x) = 0$, se obtiene la ecuación, $5y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$. Se trata de una ecuación diferencial ordinaria, de segundo orden, homogénea con coeficientes contantes.
Su ecuación característica es: $5r^2 + r + \dfrac{1}{4} = 0$, y tiene dos soluciones complejas conjugadas $r_1 = -\dfrac{1}{10} + i\,\dfrac{1}{5}$, $r_2 = -\dfrac{1}{10} - i\,\dfrac{1}{5}$. La solución general de la ecuación es:

$$\boxed{y(x) = c_1\,e^{-\frac{x}{10}}\cos(\tfrac{x}{5}) + c_2\,e^{-\frac{x}{10}}\sin(\tfrac{x}{5})\,,}$$

donde $c_1\,, c_2$ son constantes.

iii) La ecuación a resolver ahora es: $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 2e^{\frac{x}{2}}$.
Su solución es $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde $y_h(x)$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea e $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea.
La ecuación característica es: $r^2 + r + \frac{1}{4} = 0$, tiene por solución $r = -\frac{1}{2}$, raíz real doble. Por tanto: $y_h(x) = c_1e^{-\frac{x}{2}} + c_2\,x\,e^{-\frac{x}{2}}$.
Para hallar la solución particular debemos seguir dos métodos distintos, por ejemplo podemos seguir los siguientes.

Método de los coeficientes indeterminados:
Teniendo en cuenta el término no homogéno de la ecuación, proponemos que $y_p(x) = Ae^{\frac{x}{2}}$. Sustituyendo en la ecuación se tiene que $Ae^{\frac{x}{2}} = 2e^{\frac{x}{2}}$, por lo que $A = 2$, y la solución particular es: $y_p(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$

Método de variación de los parámetros:
Suponemos que la solución particular es de la forma $y_p(x) = u_1(x)e^{-\frac{x}{2}} + u_2(x)xe^{-\frac{x}{2}}$, donde u_1 y u_2 son dos funciones que resuelven el sistema formado por las ecuaciones $u_1'e^{-\frac{x}{2}} + u_2'xe^{-\frac{x}{2}} = 0\,,\; -(1/2)u_1'e^{-\frac{x}{2}} + u_2'(-x/2+1)e^{-\frac{x}{2}} = 2e^{\frac{x}{2}}$. Resolviendo este sistema se llega a la misma solución particular: $y_p(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$.

Por tanto la solución general pedida es $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2\, x\, e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}}$. Las constantes $c_1 = -1$, $c_2 = -\frac{3}{2}$ se obtienen imponiendo las condiciones iniciales: $y(0) = 1\,, y'(0) = 0$. Finalmente la solución es:

$$\boxed{y(x) = -e^{-\frac{x}{2}} - \tfrac{3}{2}\, x\, e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}}}$$

Cuestión 33 Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de coeficientes indeterminados o el de variación de los parámetros:

$$y'' - y' - 6y = e^x + 1; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

SOLUCIÓN:
Solución de la ecuación homogénea:

Ecuación característica: $r^2 - r - 6 = 0$, tiene dos soluciones reales $r_1 = -2$ y $r_2 = 3$, por lo tanto $\quad y_h = c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^{3x}$

Solución particular:

Utilizamos, por ejemplo, el método de coeficientes indeterminados.

Consideramos $\quad y_p = Ae^x + B \quad \Rightarrow \quad y_p' = Ae^x \quad \Rightarrow \quad y_p'' = Ae^x$

Sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos $\quad A = B = -1/6 \quad \Rightarrow \quad y_p = -\frac{1}{6}(e^x + 1)$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial es: $\quad y = c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^{3x} - \dfrac{1}{6}(e^x + 1)$

En esta solución usamos las condiciones iniciales y resulta $\quad c_1 = \frac{23}{30} \quad c_2 = \frac{17}{30} \quad$ con lo que la solución del problema de valor inicial es:

$$\boxed{y = \frac{23}{30}\, e^{-2x} + \frac{17}{30}\, e^{3x} - \frac{1}{6}(e^x + 1)}$$

Cuestión 34 Halla, mediante serie de potencias, la solución a la siguiente EDO:

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0\,.$$

SOLUCIÓN:
Proponemos la solución en serie de potencias centrada en $x_0 = 0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,$$

con lo que

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}\,, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n x^{n-2}$$

Sustituyendo en la EDO y multiplicando los correspondientes sumatorios por los coeficientes variables obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n x^{n} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n} = 0$$

Igualamos las potencias de x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} x^{n} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n x^{n} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n} = 0$$

Extrayendo los términos necesarios para sincronizar los sumatorios y operando se llega a que

$$2a_2 - 2a_0 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} + (n-1)(n+2) \cdot a_n\right] x^n = 0$$

Igualando los coeficientes de cada potencia a cero obtenemos

$$a_2 = a_0\,, \quad a_3 = 0\,, \quad a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+1}\, a_n\,,$$

con lo que

- $a_2 = a_0$, $a_4 = -\frac{1}{3}\, a_0$, $a_6 = \frac{1}{5}\, a_0$, ... , $a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\, a_0$, ...
- $0 = a_3 = a_5 = a_7 = ... = a_{2n+1} = ...$

La solución queda

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_0 x^2 - \frac{a_0}{3} x^4 + \frac{a_0}{5} x^6 + ... = a_1 x + a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n}$$

Cuestión 35 Resolver la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

SOLUCIÓN:

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y''-4y'+4y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Cálculo de $y_h(x)$:
La ecuación característica, $r^2 - 4r + 4 = 0$, tiene por solución, $r = 2$ raíz real doble, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma $\mathcal{B} = \{e^{2x}, xe^{2x}\}$. Concluimos que

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x}\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.

Cálculo de $y_p(x)$:
Vamos a hallar la solución particular mediante el método de los coeficientes indeterminados. Observamos que la parte no homogénea de la ecuación diferencial, $g(x) = (x+1)e^{2x}$, es solución de la ecuación homogénea, por tanto vamos a proponer una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = x^2(A + Bx)e^{2x} = (Ax^2 + Bx^3)e^{2x}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial e identificando coeficientes se obtiene: $A = 1/2\,, B = 1/6$, por tanto,

$$y_p(x) = (\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})e^{2x}$$

Finalmente, la solución general de la ecuación es

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + (\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})e^{2x}}$$

Cuestión 36 Sea la ecuación diferencial:

$$(x^2 + 1)y'' + 4y = 0, \; ,$$

Suponiendo que la solución de la ecuación viene dada por la serie de potencias $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, se pide:

(i) Hallar la relación de recurrencia que satisfacen los coeficientes a_n .

(ii) Aplicando el apartado (i), escribir los tres primeros términos de la serie.

SOLUCIÓN:

(i) Sea $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, por tanto

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}\,.$$

Sustituyendo estas series en la ecuación se obtiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \; = \; 0\,.$$

Ahora, para tener la potencia x^n en todas las series, hacemos un cambio del índice en la serie central, esto es

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\, a_{n+2}\, x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \; = \; 0\,,$$

así pues,

$$2a_2 + 4a_0 + (6a_3 + 4a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big[(n(n-1)+4)\, a_n + (n+2)(n+1)\, a_{n+2} \Big] x^n \;=\; 0\,.$$

Finalmente, se obtiene la relación de recurrencia igualando a cero los coeficientes de cada potencia de x,

$$2a_2 + 4a_0 \;=\; 0\,, \quad 6a_3 + 4a_1 \;=\; 0\,, \quad (n(n-1)+4)\, a_n + (n+2)(n+1)\, a_{n+2} \;=\; 0\,,$$

que puede ser expresada como

$$\boxed{a_2 = -2\, a_0\,, \quad a_3 = -\frac{2}{3}\, a_1\,, \quad a_{n+2} = -\frac{n(n-1)+4}{(n+2)(n+1)}\, a_n}\,,$$

con $n = 2, 3, 4, \ldots$.

(ii) Los tres primeros términos de las serie son $a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2$.
Teniendo en cuenta la relación de recurrencia obtenida en (ii) se obtiene:

$$\boxed{a_0 + a_1\, x - 2\, a_0\, x^2 = a_0(1-2x^2) + a_1 x}$$

donde $a_0\,, a_1$ son constantes.

Cuestión 37 Sea la ecuación diferencial

$$(x-1)\, y'' + y' \;=\; 0\,.$$

Suponiendo que la solución de la ecuación viene dada por la serie de potencias $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, se pide:

(i) Hallar la relación de recurrencia que satisfacen los coeficientes a_n .

(ii) Aplicar las condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, y escribir los tres primeros términos no nulos de la serie de potencias.

SOLUCIÓN:

(i) Sea $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, por tanto

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}\,.$$

Sustituyendo estas series en la ecuación se obtiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \;=\; 0\,.$$

Ahora, para tener la potencia x^n en todas las series, hacemos un cambio del índice en cada una de ellas, esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n\,a_{n+1}\,x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\,a_{n+2}\,x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,x^n \;=\; 0\,,$$

así pues,

$$-2a_2 + a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+1)n\,a_{n+1} - (n+2)(n+1)\,a_{n+2} + (n+1)\,a_{n+1}\Big]\,x^n \;=\; 0\,.$$

Finalmente, se obtiene la relación de recurrencia igualando a cero los coeficientes de cada potencia de x,

$$-2a_2 + a_1 \;=\; 0\,, \quad (n+1)^2\,a_{n+1} - (n+2)(n+1)\,a_{n+2} \;=\; 0\,,$$

que puede ser expresada como

$$\boxed{a_2 = \frac{a_1}{2}\,, \quad a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,a_{n+1}}\,,$$

con $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(ii) Usando la relación de recurrencia obtenida en el apartado (i), se tiene

$$a_2 = \frac{a_1}{2}\,, \quad a_3 = \frac{a_1}{3}\,, \quad a_4 = \frac{a_1}{4}\,, \quad \ldots\,.$$

Aplicado las condiciones iniciales obtenemos $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, por lo que los tres primeros térmninos no nulos de la serie son

$$\boxed{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$$

Cuestión 38 Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de los coeficientes indeterminados

$$y'' + 2y' + 2y = t + e^{2t}\,; \quad y(0) = 0,\; y'(0) = 1\,,$$

SOLUCIÓN:

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y''+2y'+2y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Cálculo de $y_h(x)$:

La ecuación característica, $r^2 + 2r + 2 = 0$, tiene por soluciones, $r = -1 \pm i$ raíces complejas conjugadas, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma $\mathcal{B} = \{e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t)\}$. Concluimos que

$$y_h(t) = c_1 e^{-t}\cos(t) + c_2 e^{-t}\sin(t)\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.

Cálculo de $y_p(x)$:
Siguiendo el enunciado del problema, vamos a hallar la solución particular mediante el método de los coeficientes indeterminados. Dado que $g(t) = t + e^{2t}$,, proponemos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = At + B + Ce^{2t}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial e identificando coeficientes se obtiene: $A = 1/2\,, B = -1/2\,, C = 1/10$, por tanto,

$$y_p(t) = \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{10}e^{2t}$$

La solución general de la ecuación es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1e^{-t}\cos(t) + c_2e^{-t}\sin(t) + \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{10}e^{2t}$$

Ahora calculamos las constantes c_1 y c_2 imponiendo las condiciones iniciales, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$, y se obtiene: $c_1 = 2/5\,; c_2 = 7/10$. Finalmente, la solución pedida es

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{5}e^{-t}\cos(t) + \frac{7}{10}e^{-t}\sin(t) + \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{10}e^{2t}}$$

Cuestión 39 Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-t}\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,,$$

se pide:

i) Hallar su solución general.

ii) Obtener la solución que cumple $y(0) = 0\,; y'(0) = 1$.

iii) Comprobar la solución obtenida en el apartado ii).

SOLUCIÓN:

i) Se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y'' - 3y' + 2y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.
Cálculo de $y_h(x)$:
La ecuación característica, $r^2 - 3r + 2 = 0$, tiene por soluciones, $r_1 = 2\,, r_2 = 1$, raíces reales y distintas, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma $\mathcal{B} = \{e^{2t}, e^t\}$.
Concluimos que

$$y_h(t) = c_1e^{2t} + c_2e^t\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.
Cálculo de $y_p(x)$:
Vamos a hallar la solución particular mediante el método de los coeficientes indeterminados. Dado que $g(t) = e^{-t}$,, proponemos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = Ae^{-t}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial e identificando coeficientes se obtiene: $A = 1/6$, por tanto,

$$y_p(t) = \frac{1}{6}e^{-t}$$

Nota: También se puede obtener una solución particular usando el método de variación de los parámetros.
La solución general de la ecuación es:

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1e^{2t} + c_2e^t + \frac{1}{6}e^{-t}}$$

ii) Ahora calculamos las constantes c_1 y c_2 imponiendo las condiciones iniciales y se obtiene: $y(0) = c_1 + c_2 + \dfrac{1}{6} = 0$, $y'(0) = 2c_1 + c_2 - \dfrac{1}{6} = 1$, por tanto $c_1 = 4/3\,; c_2 = -3/2$. Finalmente, la solución pedida es

$$\boxed{y(t) = \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{6}e^{-t}}$$

iii) A partir de la solución obtendida en el apartado anterior se tiene que $y'(t) = \frac{8}{3}e^{2t} - \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{6}e^{-t}$; $y''(t) = \frac{16}{3}e^{2t} - \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{6}e^{-t}$.
Sustituyendo estas funciones en la ecuación diferencial se obtiene
$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}$, que es la comprobación que nos piden en el enunciado.

Cuestión 40 Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' + 2\,y' + y = \cos(2t)\,; \quad y(0) = 0,\; y'(0) = 0\,,$$

SOLUCIÓN:

Se trata de una EDO de segundo orden no homogénea. Hallando la solución de la EDO homogénea a partir de la ecuación característica y una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados, se obtiene la solución del PVI:

$$\boxed{y(t) = -\tfrac{3}{25}\cos(2t) + \tfrac{4}{25}\sin(2t) + \tfrac{e^{-t}}{25}(3 - 5t)}$$
